colorchecker CLASSIC
x-rite
mm

MECANIQUE

COSMOGRAPHI

DESCRIPTIV

ÉCOLE

NORMALE

MS

218

E.N.S.

S
8
s.

Ms 218

1 n

12

Programme

du Cours d'Analyse

N° 1

2 r

2v

La droite qui joint le point de croisement du fil au centre optique de l'objectif est ce que nous nommerons l'axe optique de la lunette. — Quand un point lumineux forme son image au point de croisement, c'est que ce point se trouve dans la direction de l'axe optique de la lunette. —

~~Instrument~~ Munie une lunette ainsi construite, et la mouvant sur un limbe gradué, on pourra mesurer l'angle de deux objets. —

Une lunette peut encore servir à déterminer le moment précis où un objet passe dans un plan déterminé. Ce sont là deux principaux usages des lunettes. —

Observations — La simple observation du ciel montre que les étoiles se déplacent graduellement, en conservant la même disposition relative; elles semblent se mouvoir comme le soleil de l'orient vers l'occident, mais ne pas faire avec la même vitesse. Il y en a même qui ne paraissent pas se déplacer (l'étoile polaire). Les étoiles voisines de celle-là semblent décrire des cercles autour d'elle; il en est de même des étoiles plus éloignées qui décrivent un cercle non entièrement visible pour nous. — De plus si on se déplace sur la surface de la terre de quelques lieues, la disposition mutuelle des étoiles ne change pas, ce qui indique que les étoiles sont à une distance de la terre beaucoup plus grande que la dimension terrestre. —

Nous sommes portés à regarder les étoiles comme attachées à une sphère dont l'observateur est le centre; les étoiles semblent être toutes à la même distance, du reste elles aspirent toujours imaginer une pareille sphère. — La voûte de la sphère que nous voyons pendant le jour est parsemée d'étoiles comme celle que nous voyons la nuit.

La sphère que nous voyons dans la nuit à un certain époque est une pend. le jour six mois après. —

Les étoiles conservent les mêmes distances relatives. — Il y a des exceptions; le soleil et la lune ne conservent pas toujours la même place par rapport aux étoiles; il y a les planètes qui se déplacent aussi par rapport aux étoiles. Les étoiles sont appelées <u>étoiles fixes</u>.

Le mouvement de la sphere céleste peut être considéré comme
faisant tout d'une pièce, comme il y a un point immobile, et que le centre
est immobile, le mouv. sera un mouvement de rotation autour du
diametre passant par le point immobile. - Ce n'est qu'en tout approximat.
admett. que cet en tout rigoureusement ainsi; et que le mouv. de
rotation est uniforme -; nous pouv. vérifier les lois au moyen des observations.

on appelle verticale la direct. du fil a plomb. -
le plan perpend. est l'horizon. -- C'est aussi le grand cercle
de la sphere déterminé par ce plan. - . zenith -. pôle de la sphere céleste,
axe de la sphere -. l'un des pôles est situé pour nous au dessus de l'horiz. c'est
le pôle boreal; - un plan vertical passant par l'axe de la sphere
céleste est le plan meridien du lieu de l'observation; la trace horizontale
de ce plan meridien est la ligne meridienne, la direct. de cette ligne du
côté du nord. -
la direct. ~~horizontale~~ perpendiculaire a la lig. meridienne donne l'est et
l'ouest -.

Verif. la loi du mouv. diurne. - Il est du mouv. diurne que
chaque etoile décrit un petit cercle; les petits cercles sont décrits dans un
même temps; donc tout plan passant par l'axe de chaque petit cercle
en a parcouru des parties égales qui doivent être parcourues dans des temps égaux; il en
sera ainsi pour le pl. merid. - donc en prenant déterm. un plan vertical
passant. les petits cercles des etoiles en a parcouru des parties
égaux. - et l'heure est déterminé pour une etoile, il le sera pour toutes. -

Jouet. Cela est fait de la lunette meridienne. - Lunette de
mouvant autour d'un axe perpendiculaire à la lunette.

L'axe doit être parfaitement horizontal; on l'en assure au moyen
d'un niveau suspendu a l'aide de deux crochets. -

il faut que l'axe optique de la lunette décrive un plan vertical ; voyons comment cette condition pourra être remplie. — On vise avec la lunette un objet terrestre situé à une grande distance, et aperçu dans le plan horiz. du lieu de l'observation. — Supposons que l'axe optique ne soit pas perpend. à l'axe des cylindres, on retourne la lunette de manière que les cylindres reposent sur les autres tourillons. Alors l'objet ne se trouvera pas dans l'axe optique de la lunette ; — il faut changer le point de croisement des fils ; ~~ou peut-être~~ si on déplace le point de croisement, on pourra rendre l'axe optique exacte perpendiculaire à l'axe des supports. — On arrivera à cette exactitude par une suite de tâtonnements. —

L'ensemble du réticule peut se mouvoir de manière à être amené au foyer de l'objectif. —, il est susceptible aussi de se mouvoir circulairement dans son plan, de manière à ce que l'un des fils soit parfaitement horizontal.

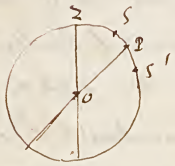
Suppos. dans l'axe optique de la lunette perpend. à l'axe des supports. Si le plan vertical décrit par cet axe était le plan méridien, si on observe une étoile, dont on voit le cercle tout entier, on verra cette étoile passer deux fois dans le vertical décrit par la lunette, lequel le cercle méridien est placé au point de croisement. — L'horloge indiquera le moment précis : on observera un passage supérieur, puis un passage inférieur, puis un passage supérieur. — Le temps écoulé entre le 1er et le 2e passage, sera égal à celui écoulé entre le 2e et le 3e. — Or cela n'arrivera pas du 1er coup ; on tournera l'un des intervalles de temps inégaux, pour les rendre égaux, en faisant mouvoir l'une des supports de la lunette ; jusqu'à ce que les intervalles de temps soient égaux. — Alors le vertical de la lunette est le plan méridien.

Si la loi du mouv. diurne était exacte, cela étant fait pour une étoile, l'observat. précédente servira pour toutes les autres ; c'est précisément ce qu'on arrive pour une étoile quelconque. — Pour cela, dans une nuit, on observe comme précédemment, on verra que l'intervalle entre le 2e passage supérieur est rigoureusement constant. —

Pour observer la direct. du plan méridien, on dirige à une grande distance un mire coïncidant exactement avec le point de croisement ; la direction de cette ligne donne la ligne méridienne. —

La lunette merid. sert encore à déterminer la durée d'une révolution de la sphère céleste, appelée <u>révolution sidérale</u>.

Si les observations sont exactes, ~~c'est-à-dire~~ au moment du passage supérieur d'une étoile au méridien, sa distance au zénith est facile à calculer.



Soit P le pôle, S l'étoile du moment de son passage au méridien. —

on a évid. $ZS = ZP - PS$ —

Soit l'étoile en S' au mom. de son passage inférieur.

on aura $ZS' = ZP + PS' = ZP + PS$. Car $PS = PS'$!

Donc $ZS + ZS' = 2ZP$.

Ce qui donne la distance du pôle au zénith; car le pôle est dans le méridien, la position du pôle est complètement déterminée —

on déduira de là PS. —

Comment mesurer la dist. zénith. d'une étoile au moment de son passage au méridien. —

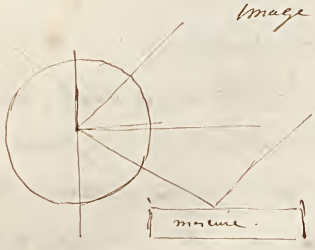
<u>Mural</u>. Mural. — Cet instr. se compose d'un cercle divisé vertical, mobile autour d'un axe horizontal dont les supports sont fixés à une muraille. — le plan de ce cercle doit être rendu parallèle au plan du méridien, et porte fixée à son centre une lunette, qui est emportée avec lui en tournant autour de son axe. Cette lunette porte au foyer de l'obj. deux fils croisés. L'axe optique de la lunette doit être rendu parallèle au plan du cercle —

Ce cercle est renfermé lui même dans un anneau concentrique fixe qui porte plusieurs points de repère; ~~dont le c.~~ pour apprécier la division du cercle à laquelle correspond le repère, celui-ci est muni d'un vernier, et on examine le tout au moyen d'un microscope fixé dans la muraille qui supporte l'instrument. Ce cercle mural a de grandes dimensions, afin que les divisions soient plus multipliées. —

Supposons les conditions précédentes remplies. — Concevons qu'on rende l'axe optique de la lunette exactement vertical, en tournant le cercle, alors le zéro du repère coïncide avec la division de l'instrument, soit m cette division # maintenant en faisant tourner le cercle d'un angle égal à la distance zénith. de l'étoile qu'on veut observer, alors le zéro ~~coïncide~~ du vernier coïncidera

au cadrans $m+z$. dans z sera la distance zénithale de l'étoile. Si donc m était connu, il serait facile d'avoir z; il suffirait tourner le cercle de manière à observer l'étoile au moment de son passage au méridien. — Soit $m+z=n$. on aura $z=n-m$. le nombre constant m est ce qu'on appelle l'erreur de collimation. —

Il faut déterminer le nombre m. — on pourrait y parvenir si on savait qu'une étoile passe exactement au zénith; à autre moyen. on dirige la lunette vers l'étoile et vers sa image réfléchie par un plan parfaitement horizontal. — Les dist. zénith. de l'étoile et de son image sont deux angles supplémentaires l'un de l'autre. — si l'un est z l'autre sera $180-z$. — Supposons que la lunette étant dirigée vers S, le zéro du vernier coïncide avec une division n; et que la lunette étant dirigée vers l'image le zéro coïncide avec la div. n'. —



on aura $n = z + m$

$n' = 180 - z + m$.

d'où $m = \frac{n+n'}{2} - 90°$ —

le nombre m est ainsi connu.

Observat. — nous avons supposé que S était dans le méridien, et qu'au moment où l'on observe l'image, S avait conservé le même point. or, au moment de la seconde observation, z a changé; pour éviter cela, on fait les observat. avant le passage au méridien, et les 2e observation après le passage au méridien. de telle sorte que le passage au méridien divise ce deux opérations en deux parties égales. — il n'y a pas d'erreur sensible sur les distances zénithales; car l'étoile au moment de son passage au méridien décrit une ligne sensible horizontale. —

Nous avons supposé qu'il n'y avait qu'un seul repère; mais il y en a plusieurs afin de corriger les erreurs de graduation du cercle. il y en a 6, occupant chacun deux verniers; le zéro du vernier est le repère. —

Supposons constamment (même) la lunette vertical —
Soit m_1 m_2 — m_6 — la division du cercle correspond. au repère — on aurait $\frac{m_1+m_2+ \quad m_6}{6} = m$

Ce nombre n'est pas connu; supposons le connu — fixons l'étoile; la lunette tourne d'un angle 2 — les repère correspondent aux divisions

m_1+2, m_2+2 — . . m_6+2

prenons le moyen qui est

$$\frac{m_1+m_2+ \quad +m_6+12}{6} = n.$$

ou $n = m+2$. d'où $m = n-2$.

Si donc m était determ. pour avoir la distance zenithale, diriger la lunette vers l'astre, prendre la moyenne des indicat. des 6 repères, et retrancher de cette moyenne le nombre constant m —; pour determ. m on ferait comme il a été indiqué dans le cas où on n'y avait qu'un seul repère. —

On peut rendre un cercle exact. perpend. à un axe. —
Nous admettons que le mural est perpendicul. à l'axe autour duquel il tourne pour rendre le cercle vertical, on fixe aux 2 extr. d'un diamètre deux pointes, puis on prend 2 points situés à des distances égales du limbe; on suspend un fil à plomb qui touche contre les 2 points dont vient battre contre le second, le cercle est vertical; il reste prog. si cela alors le cercle est vertical, alors l'axe du cercle sera horizontal —

Il faut maintenant que le plan du cercle coïncide avec le plan du méridien et qu'alors opt. de la lunette soit parall. au pl. de l'éq.; ces deux verificat. se font en même temps. — Si ces condit. sont remplies, l'axe optique de la lunette ne se déplace que dans le plan méridien. or ~~le connaît~~ il faut qu'une étoile passe au même instant au point de crois. du fil de la lunette et au point de croisement du fil à la lunette méridienne et l'axe optique de cet lunette est alors dans le plan du méridien.

Cette seule observat. ne suffit pas ; car si l'axe optique n'est pas parallèle au plan du limbe, quand on visera une autre étoile, l'axe optique décrira un cone de révolut. autour de l'axe du cercle, et l'étoile ne passera plus en même temps au point de croisement du fils de la lunette du mural, et à celui de la lunette méridienne. — Si l'observat. a été faite pour deux etoil. situées à des hauteurs différentes au dessus de l'horizon, et que la simultanéité de passage ait lieu pour deux etoil différentes, l'axe optique est parallèle au plan du limbe (car alors se réduit à un plan) ; et le limbe est parallèle au méridien, puisque l'axe optique dans ses deux position est situé dans le plan méridien — Si la condit. n'est pas remplie, en dérangeant les fils, en dérangeant l'axe un peu, on parviendra par des tatonnements à rendre l'axe optiq. parallèle au plan du limbe, qui sera parallèle lui même au plan méridien —.

On peut ainsi vérifier rigoureusement une de conséquence du mouvement diurne tel que nous l'avons admis —

on peut trouver la distance zénithale des différentes étoiles, ainsi que la distance polaire de ces mêmes étoiles. —

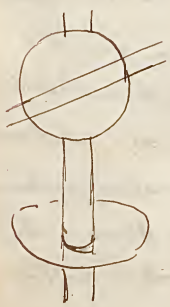
Si une étoile n'a qu'un seul passage au méridien lorsque l'on connait la distance zénithale du pole, on peut trouver la distance polaire —

Les observat. précédentes doivent être corrigées de la réfraction.

~~Proprement~~ Il nous reste comme conséquence du mouvement diurne à démontrer que l'étoile reste toujours à la même distance du pole. —

Cercle entier

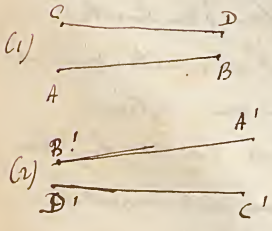
La détermination de la position d'une étoile peut se faire au moyen d'un cercle entier. — Cet instrument se compose d'une lunette qui peut tourner dans un plan vertical, en entraînant avec elle un limbe gradué. Le tout peut tourner en outre avec un axe vertical, de manière que la lunette et le limbe peuvent être placés dans tous les plans verticaux possibles. L'axe vertical supporte encore un cercle horizontal qui entraîne avec lui. Le tout est solidement fixé. —



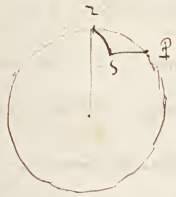
le cercle vertical est entouré d'une couronne circulaire fixe à l'axe, mais qui n'a pas de mouvement sur elle même; sur cette couronne circulaire se trouve un repère, que sert à voir de combien le limbe a tourné sur lui même. — ~~Dans~~ Le cercle horizontal qui tourne avec l'axe, est enchassé de même dans une couronne circulaire fixe, qui porte un ou plusieurs points de repère. — on peut viser un astre dans une position avec ce pareil instrument. — la lunette étant dirigée sur l'astre, on en déduit la distance zénithale de l'étoile, (les obs. sont les mêmes que pour le mural — correction de ...) — il faut ensuite déterminer l'azimuth de l'étoile, c'est à dire l'angle que le vertical de l'astre fait avec le plan du méridien. — pour cela il faut savoir à quelle division du cercle horizontal correspond le zéro du vernier pour que la lunette soit dans le plan du méridien, et pour cela on vise au même instant l'étoile avec la lunette de l'instrument et avec la lunette méridienne.

précaution à prendre — l'instrument doit être vertical; on s'en assure au moyen du fil à plomb, absolument comme pour le mural; — il faut s'assurer alors que l'axe est vertical; ce qu'on fait en faisant tourner autour de l'axe le limbe; — et le fil à plomb doit toujours battre exactement contre les mêmes traits. — L'axe étant vertical le cercle horizontal est horizontal — l'axe optique de la lunette doit être parallèle au plan du limbe; — pour cela on dirige la lunette vers un objet assez éloigné; puis on fait tourner l'instrument de 180° autour de son axe — alors il faudra que l'axe optique de la lunette soit de nouveau dirigé vers l'objet. pour nous rendre compte de ~~l'instrument~~ cela, faisons une coupe horizontale de l'instrument, passant par la lunette, que nous supposerons horizontale. Soit AB l'axe optique de la lunette; CD l'intersection du plan du limbe avec le plan perpendiculaire; — à cet instant faisons tourner l'instrument de 180° autour de son axe; on aura la position (2); la ligne CD se confondra avec C'D'. Maintenant l'oculaire de la lunette est en A' et l'objectif en B'. on peut tourner le limbe sur lui même de 180°; de manière à amener l'oculaire du côté de l'observateur. Les choses sont comme elles étaient; l'axe optique n'étant pas parallèle au plan du limbe l'objet ne sera pas visible dans la 2e position du lunet. d'après l'axe optique. alors on déplacera un peu l'axe optique, et par tâtonnement on le rendra parallèle au pl. du limbe

* pour cela sur deux traits perpendicul. au limbe sont tracés deux traits a, b situés à égale distance du limbe. le fil à plomb doit battre constamment contre ces deux traits. —

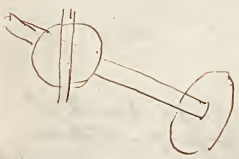


Voyons comment on peut se servir de cet instrument.



Soit P le pôle — Z le zénit. — S l'étoile, soit PZS = a. l'horloge donne le temps h qui s'est écoulé depuis le moment du passage au méridien. — Si les lois du mouvement diurne sont exactes, on peut calculer Z et a d'une autre manière. — Soit SP = δ. c'est une quantité qu'on détermine avec le mural; de même ZP est connue au moyen du mural — du temps h on peut déduire l'angle ZPS: on a ZPS : 2π :: h : 24 — d'où ZPS = $\frac{\pi h}{12}$. ; dans SPZ, on connaît 2 côtés et l'angle compris; on peut donc calculer Z et a; et pour ici la valeur obtenue ainsi sont les mêmes que celles données directement par l'observation. — Ceci alors; donc les lois du mouvement diurne sont parfaitement exactes. —

Équatorial



L'axe parallèle à l'axe porte une lunette qui peut décrire un plan parallèle au plan parallèle au plan du limbe. — L'axe prolongé à l'arc est enchassé dans une couronne circulaire fixe, qui porte plusieurs points de repère.

Il y a un autre instrument au moyen duquel on pourrait vérifier les lois du mouvement diurne. C'est l'équatorial; l'axe est parallèle à l'axe du monde, — C'est ainsi supposé dans cet; l'un que lui est parallèle l'autre qu'il est perpendiculaire. — La lunette étant dirigée vers une étoile, et étant fixée au limbe, se pourra plus décrire qu'une zone de révolution autour de l'axe. et en pourra s'assurer que l'étoile étant vue dans une position, elle pourra être vue dans toutes les autres positions. — de plus on verra que l'angle dont il faut tourner l'axe pour voir l'étoile dans deux positions ~~successives~~ différentes est proportionnel à l'intervalle de temps que l'étoile a mis pour aller d'une position à l'autre —.

Définitions.

plan horaire — angle horaire.

Ce chaque instant on peut concevoir un plan passant par l'étoile et l'axe de la sphère; c'est le plan horaire de l'étoile — l'angle que ce plan fait avec le méridien est l'angle horaire (1) de l'étoile l'angle horaire d'une étoile est variable, — on nomme ascension droite de l'étoile, l'angle que le plan horaire fait avec un plan horaire fixe pour origine; les ascensions droites se comptent de 0 à 360, dans le sens contraire du mouvement diurne. — Le plan fixe est celui qui passe par l'axe du monde et l'équinoxe du printemps. —

ascension droite

quand on connaît l'heure de passage au méridien d'une étoile, et l'heure de passage de ~~l'astre~~ pris pour origine, on en déduit l'ascension droite de ~~cette~~ l'étoile — si entre ces deux passages il s'est écoulé h, on a donné par $\alpha : 2\pi :: h : 24$ d'où $\alpha = h.15°$.

L'ascension droite ~~étant~~ d'une étoile étant connue, pour avoir celle d'une seconde, il suffira de connaître l'intervalle de temps compris entre le passage de ces 2 étoiles au méridien. —

La <u>déclinaison</u> d'une étoile est le complément de sa distance polaire; elle se compte de 0° à 90°. on indique si elle est boréale ou australe —

L'ascens. droite et la déclinaison sont les coordonnées d'une étoile sur la sphère céleste.

(Ces différents éléments ne sont pas complets. invariables; nous verrons cela plus tard. + — un catalogue d'étoiles construit actuellement deviendrait complètement fautif dans quelq. milliers d'années.

Constellations. — grande ourse. petite ourse. —

il est important de déterminer ~~l'excès~~ les ds de la zénithal. des étoiles que sont trop près du zénith. — et pour quelles la réfract. a peu d'influence. pour cela on a un secteur zénithal — On a un arc d'un petit nombre de degrés, et d'un assez grand rayon; cet instrument est muni d'une lunette.(1) — il peut tourner autour d'un axe vertical — on doit s'assurer que le limbe est vertical, au moyen du fil à plomb.(2) il faut s'assurer que l'axe optique de la lunette est parallèle au plan du limbe ou s'en assurer au moyen du passage d'une étoile au zénith. on doit voir l'étoile au zénith au même instant qu'on la voit avec la lunette méridienne.

Si le zéro du vernier coïncidait avec le zéro du limbe quand l'axe optique de la lunette est vertical, il serait facile d'avoir la distance zénithale des étoiles. Mais cette coïncidence n'a pas lieu généralement. il en résulte une <u>erreur de collimation</u> qu'il faut déterminer. L'axe optique de la lunette étant vertical, suppos. que le zéro du vernier coïncide avec la division α du limbe que nous ne connaissons pas. (suppos. le zéro du limbe à gauche de celui du vernier. on n'en sait rien d'avance.). Si on vise une étoile dirigée vers le nord, on aura la distance zénithale diminuée de α

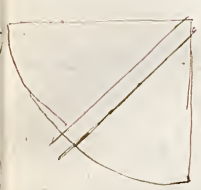
Secteur zénithal

(1) la lunette peut tourner autour du centre de l'instrument; elle entraîne avec elle un vernier qui parcourt la division du limbe.

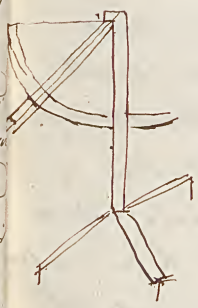
(2). on s'assure aussi que l'axe est vertical, en faisant tourner le secteur autour de l'axe vertical.

on aura $\xi = Z - \alpha$. Si on fait tourner l'instrument de 180°, puis qu'on vise la même étoile, alors la distance zenithale ξ' qu'il indiquera sera $\xi' = Z + \alpha$. on aura $\alpha = \frac{\xi' - \xi}{2}$. —

Quart de cercle mural — Le quart de cercle est fixe; il ne se meut pas avec la lunette; le plan du limbe doit être vertical, et coïncider avec le plan du méridien, ce dont on s'assure en constatant qu'une étoile se trouve en même temps dans la lunette du mural, et dans la lunette méridienne. Si on fait cela pour deux étoiles différentes, on saura en outre qu'il l'axe optique de la lunette est parallèle au plan du limbe. — La lunette tourne autour de son centre, et entraîne avec elle un vernier. L'erreur de collimation ne peut pas s'obtenir par le retournement, mais on pourra comparer les indications que donnent l'instrument avec celles que donne un cercle zenithal pour lequel on connaît l'erreur de collimation, on en déduira l'erreur de collimation pour le quart de cercle mural. —



On emploie aussi le quart de cercle mobile et portatif. — C'est un quart de cercle semblable au précédent et qui est porté par un axe vertical autour duquel il peut tourner. On s'assure que le limbe est vertical, qu'il en est de même de l'axe, ce qui sera si dans le mouvement de rotation il ne cesse pas de battre contre les deux mêmes traits. Il faut ensuite que le plan du limbe soit parallèle au méridien, et que l'axe optique de la lunette soit parallèle au plan du limbe, on emploie le procédé déjà indiqué. — L'erreur de collimation peut se déterminer par le retournement, pour cela le quart de cercle est prolongé un peu au delà de la verticale. —



Cet instrument peut être employé à déterminer l'heure du passage d'une étoile au méridien. Observons une étoile dans un certain plan; soit h le moment où l'étoile est dans l'axe optique de la lunette. On fixe la lunette au limbe. L'étoile continue sa marche et va passer au méridien, s'abaisse; il y aura un moment où pourra la revoir avec l'instrument soit h' le moment. Alors $\frac{h+h'}{2}$ sera

l'heure du passage d'une étoile au méridien. Connaissant l'heure du passage au méridien d'une certaine étoile, il sera facile de mettre le plan du limbe sur le méridien, sans avoir besoin de lunette méridienne. Cette méthode s'appelle <u>méthode des hauteurs correspondantes.</u>

Cercle répétiteur

Cercle répétiteur. on l'emploie à la détern. de dist. zénithales d'étoiles et à la détern. de l'angle compris entre deux objets. —

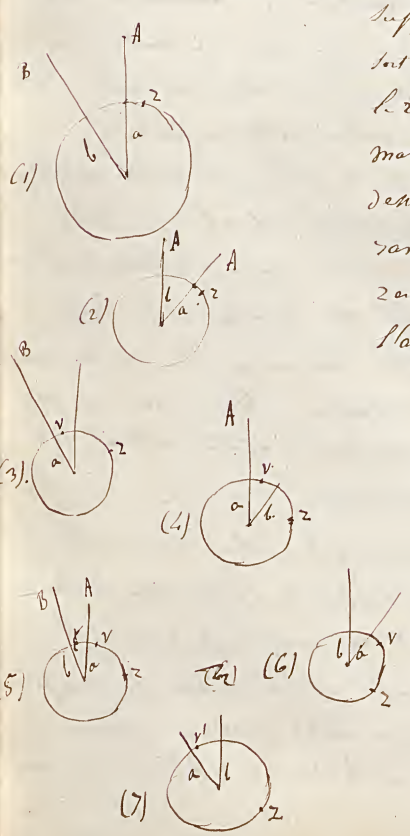
Pour ce dernier but il suffirait d'avoir un limbe qui fut susceptible de se placer dans tous les plans possibles; au moyen du cercle répétiteur on peut avoir un multiple de l'angle cherché, sans que l'erreur qui en résulte soit plus grande que si on mesurait un seul angle; alors si α est l'erreur commise sur le multiple de l'angle, $\frac{\alpha}{n}$ sera l'erreur commise sur l'angle ~~lorsque~~ cherché.

Voy. d'abord grossièrement de quoi se compose l'instrument; il se compose d'un cercle mobile autour d'un axe ~~mobile~~ perpend. à sa direction. Cet axe traverse un essieu qui lui est perpendicul. et horizont. Cet essieu est lui-même soutenu par 2 traverses verticales; ces deux traverses sont réunies par une traverse horizontale, laquelle est soutenue par un pied vertical; ce pied supporte un cercle divisé, qui est entraîné avec lui dans son mouvement. Le cercle est enchâssé dans une couronne circulaire fixée à l'axe; il entraîne avec lui une lunette. Cette lunette supérieure. au dessous se trouve une lunette inférieure qui ne passe pas par le centre du cercle, à cause de l'axe qui en occupe. on peut alors amener le plan du cercle supérieur parallèle à tel plan qu'on voudra, en faisant tourner le cercle autour d'un essieu, puis autour du pied. — Ce pied lui-même est supporté par trois pieds munis de vis qui servent à rendre le pied vertical. — on peut faire tourner chaque lunette séparément; puis les deux lunettes étant fixes, on peut faire tourner sur lui-même le système du limbe et des deux lunettes. —

Voyons comment on peut mesurer l'angle de deux objets. On met la lunette supérieure au zéro, le zéro du vernier coïncide avec le zéro du cercle gradué. puis à amener le plan du limbe à coïncider avec le plan des 2 rayons visuels menés aux deux objets. On y arrive par tâtonnement; supposons que cet ordre ait pu être ainsi; il faut s'assurer que les axes optiques des lunettes peuvent être amenés à passer par les deux objets. — on fait tourner la lunette supérieure avec le limbe afin de ne pas déranger la coïncidence du zéro du vernier et du zéro du limbe, et on amène son axe optique à passer par le 1er objet. on fait ensuite

Supposons le fait. — la lunette supér. est au zéro, dirigée sur un des objets, puis l'autre lunette est dirigée sur l'autre objet. —

Supposons que le spectateur soit le plan des deux objets A B. soit a la lunette supérieure. b la lunette inférieure — soit au zéro du zéro du vernier. on fait tourner tout l'appareil de manière à amener b dans la direction A. fig (2). on dessert la lunette supérieure, et le cercle divisé restant fixe, on ramène la lunette supérieure vers l'objet B. fig (3). le zéro du vernier arrive en v. l'angle 2v donne le double de l'angle demandé. —



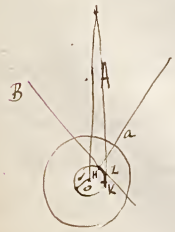
fait tout tourner, et ramener a vers A. fig (4). on détache la lunette b. et on la ramène sur B. on a fig (5). fait tout tourner et ramener b vers A. fig (6) ramener a vers B. fig (7). et l'angle 2v' est égal à 4 fois l'angle cherché. — la fig (7) offre la même disposition que la fig (3) — on continuera ainsi — il n'y a que deux erreurs de lecture; celle du commencement et celle de la fin.

il y a de erreur de pointé mais les erreurs se compensent ou elles se
car elles tirent les unes dans le sens, les autres dans l'autre sens. —

on peut mesurer la distance zenithale des étoiles avec cet
instrument. la lunette inférieure ne sert plus, — il faut
rendre le pied vertical, et le plan du limbe vertical..
on amene la lunette au zero.. on amene le vertical du limbe dans
le plan vertical qui contient l'étoile. on amene la lunette sur
l'étoile, en faisant tourner le limbe et la lunette tout d'une pièce
ou retourne l'instrument de 180° autour de son pied. on fait tourner
la lunette sur son tourillon, et on amene la lunette sur l'étoile
on a ainsi le double de la distance zenithale cherchée. on fait
tourner de 180°. on fait tourner le limbe et la lunette de même
on ramene la lunette vers l'étoile, on fait tourner l'imbe de 180°
et puis on fait tourner seulement la lunette; on a ainsi le
quadruple de la distance demandée. et ainsi de suite —

precaut. a prendre. le pied doit être vertical; on le
assure au moyen d'un niveau fixé à la lunette inférieure;
en faisant tourner l'instrument autour de son pied, la bulle doit toujours
rester aux mêmes divisions, si le pied est vertical. — cette
verif est importante. × il faut ensuite rendre le limbe vertical
ceci est moins important, car on opérait dans un plan très voisin
du plan vertical — on le rend vertical au moyen d'un niveau
fixe perpendiculairement au plan du limbe. ce niveau a été
réglé une fois et de telle sorte que le limbe étant vertical, la
bulle occupe le milieu du niveau. —

× si le pied était incliné de α, comme on considère le pied comme allant passer au zenith, la distance zenithale serait altérée d'une quantité égale à α ...



Dans la mesure des angles de deux objets, il y a une
correct. a faire, provenant de l'excentricité de la lunette inférieure
l'axe opt. de la lunette inférieure est tangent à un cercle de rayon r.
dans la 2 premiere opération l'instrument a tourné d'un angle compris
entre les deux tangentes, BLA; car dans la 2e opération on amene
la lunette L dans la direction de A ou dans la direction AK. alors la

lunette supérieure a pris la position oa. de telle sorte que $AOa = BLA$.
on ramene la lunette supérieure vers B, et on prend BOa pour le double de ~~la distance~~ l'angle cherché. or

l'angle $BOa = BOA + AOa = x + BLA$.

les triang. BOM et ALM ont un angle opposé par le sommet.

donc BOA ou $x + B = BLA + A$.

d'où $BLA = x + B - A$. donc

BOa ou $2x'$ est l'angle que l'on cherche — on a donc

$$2x' = 2x + B - A. \quad \text{d'où } x = x' + \frac{A-B}{2}.$$

or cet facile de voir cette correct. Quand on connait la distance des objets au lieu de l'observation. on aurait

$$x = x' + \frac{r}{2}\left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OB}\right).$$

si les deux objets étaient à égale distance, la correction est nulle; il en est de même si les objets peuvent être regardés comme à une distance infinie.

Le théodolite sert à mesurer l'angle compris entre le plan vertical passant par l'observateur et deux objets quelconques. il sert aussi à déterminer les distances zenithales. — il remplit le même objet que le cercle entier. — il se compose d'un cercle vertical et d'un cercle horizontal — pour chaque mesure on peut employer la répétition. cet instrument est porté par un pied qui doit être exactement vertical. On assure la fixité de l'appareil en le faisant reposer par 3 vis calantes sur trois disques en cuivre munis de pointes qui les retiennent sur la table de l'instrument.

il faut d'abord rendre l'axe vertical ; à cet effet le pourvoir
d'un niveau à bulle d'air ; quand l'instrument tourne
autour de son pied, le niveau doit décrire sur une surface conique,
et la bulle doit toujours correspondre aux mêmes divisions du niveau
puisque le dit cercle est un cercle d'horizon dont l'axe est vertical.
on fait l'expérience pour deux plans différents : cela suffit.

Il faut l'ombre doit être vertical ; on le fait pour cela d'un
niveau qui se place sur l'axe du cercle vertical : ce niveau a
été réglé de telle sorte que la bulle est au milieu du niveau
quand l'axe de l'ombre est horizontal, et par cette le cercle vertical
ce niveau a été réglé au moyen du fil à plomb comme il a
été dit. —

angl de 2 pl. vert. passant par 2 obj. et par le lieu de l'obs.
on amène le zéro du cercle horizontal à coïncider avec le zéro du vernier.
puis on fait tourner[x] de manière à amener le plan de l'ombre
dans le plan vertical de l'une des deux objets, après quoi ; puis à
moyen de la lunette de l'ombre, on l'y amène exactement, il
faut que le plan de l'ombre contienne le 2d pl. vertical. — pour
cela on laisse fixe le cercle extérieur ; et on fait tourner l'appareil
qui entraîne seulement le cercle horizontal intérieur — : l'angle dont
a tourné le vernier est précisément l'angle des deux plans verticaux
— on peut avoir un multiple de cet angle. pour cela
on fait tourner ensemble le cercle int. et le cercle extérieur ; de manière
que le plan de l'ombre contienne le premier objet. puis on ne fait
tourner que le cercle extérieur, de manière à amener le plan de l'ombre
dans le plan vertical du 2e objet ; alors le zéro du vernier a
parcouru un angle égal à l'angle cherché ;
et autant il a parcouru un angle double de l'angle cherché
et ainsi de suite.

x ~~le cercle horizontal se compose de deux cercles~~

On peut à l'aide de cet instrument déterminer la distance zénithale d'un objet quelconque. C'est absolument comme pour le cercle répétiteur. On amène la lunette du limbe au zéro; le cercle divisé est extérieur; il y a un cercle intérieur qui supporte le vernier, et qui peut tourner indépend. du cercle extérieur. — La lunette est au zéro. On la fait on amène le plan du limbe dans le vertical de l'objet. Puis on tourne la lunette de manière que l'objet se place au point de croisement des fils. Si l'objet était un peu à droite ou un peu à gauche cela n'importe peu; mais l'objet doit être exact. à la même hauteur que le fil horizontal. Cette condit. étant remplie on fait la lunette; on fait tourner l'appareil autour du pied. de 180°. — Cette opér. n'a pas besoin d'être faite avec une très grande exactitude; ce fait on fait mouvoir la lunette, le cercle extérieur restant fixe, et on l'amène sur l'objet. Le zéro du vernier a ainsi décrit un angle double de la distance zénithale. On peut avoir de multiples fois cette; cette cinq. la même suite d'opérations.

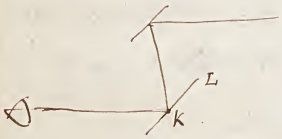
Quand on fait une observation la nuit on se sert par le fil de la lunette; on dispose à côté de la lunette un petit réflecteur en verre, et au moyen d'une bougie, on amène le rayon réfléchi par le réflecteur, on éclaire les fils de la lunette.

Il y a une autre petite pièce; c'est un oculaire destiné à regarder un astre qui est à peu près au zénith; il y a un miroir incliné à 45°, de telle sorte que l'observateur puisse regarder horizontalement. —

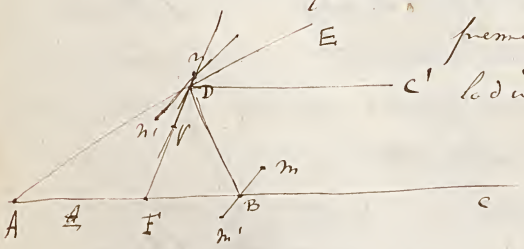
Sextant. — deux miroirs pendent au plan d'un arc de cercle divisé. Un de ces miroirs est mobile et entraîne avec lui une alidade; c'est complet et ainsi. Le second

est fixe; il n'est pas complètement étamé. la partie supérieure n'est pas — il y a une lunette dirigée sur le miroir fixe; de manière qu'on reçoit dans la lunette le rayon réfléchi dans un certain point, et le rayon transmis dans la même direction

principe. Si deux miroirs sont perpend. au plan passant par l'œil et par deux objets, et si d'abord les deux miroirs sont parallèles, l'un qu'il y a d'objet sera vu par double réflexion sur les deux miroirs, dans la même direction que s'il était vu directement. si KL n'est pas étamé, l'image vue directement et l'image vue par double réflexion coïncideront. —



2e principe. Si l'on fait tourner l'un des deux miroirs jusqu'à ce que l'image d'un point d'un objet coïncide avec l'image par double réflexion d'un second objet, l'angle dont a tourné le miroir mobile est la moitié de l'angle compris entre les rayons visuels menés aux deux objets. en effet. soit mm' le miroir fixe sur mn' le miroir mobile; supposons qu'il tourne et prenne la position np. le second objet est dans le diamètre DE. (m'BA = nBD. ODB = nDE).



Il faut prouver que $n'np = \frac{1}{2} EAB$

Il faut s'assurer que le miroir mobile est perpend. au limbe; pour cela on voit si le bord du limbe vu directement coïncide avec le bord vu par réflexion — on s'assure aussi si le miroir fixe est perpend. au limbe; pour cela il suffit de s'assurer que l'image réfléchie d'un objet peut coïncider avec l'image

vues directement. — Car alors le miroir mobile est parallèle au miroir mobile; et par suite perpendiculaire au plan du limbe. ou amener le zéro du vernier à l'alidade avec le zéro du limbe. Ceci fait les deux miroirs doivent être parallèles, ~~[illegible]~~ si l'instrument est bien construit. —

Pour viser l'un des objets directement; et il faut tourner jusqu'à ce que l'image du 2e objet coïncide avec l'image du 1er objet vu directement. L'angle dont est orienté l'instrument est la moitié de l'angle cherché —

Les marins se servent de cet instr. pour déterminer la haut. d'un astre au dessus de l'horizon. Les deux objets sont l'un l'astre et l'autre le bord de la mer. —

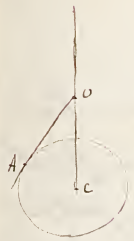
Cet instrument est construit sur le même principe (cercle à réflexion). que le sextant; on a un cercle entier de sorte que il peut multiplier l'angle. — on amène le zéro du vern. sur le zéro du cercle divisé. au plan l'alidade. ensuite on rend le miroir à demi étamé parallèle à l'autre, en s'assurant que les deux images d'un même objet coïncident. en s'assurant en prend. que le miroir est perpend. au plan du limbe. On regarde l'un des objets direct; puis on fait tourner la lunette jusqu'à ce que l'image directe d'un objet coïncide avec l'image réfléchie du 2e objet. — pour avoir un multiple, on desserre la vis qui fixait le miroir à demi étamé; et on le rend de nouveau parallèle à l'autre miroir; le zéro du vern. de l'alidade n'a pas changé. Ensuite faire mouv. ; puis on fait tourner l'alidade de manière à faire coïncider l'image directe d'un objet et l'image réfléchie du 2e objet. — et ainsi de suite.

Nyon. Ce que ainsi quand on se déplace à la surface de la terre — les obs. observés sont toujours les mêmes. quelle conclusion tirer de là ? ~~puisque les~~ un astre paraît décrire un cercle, c'est que le rayon visuel décrit un cône de révolution, et alors il faut le déplacer suivant l'axe, de ce cône pour que le mouv. ne soit pas altéré, et comme ce mouv. n'est pas altéré, quand on se déplace à la surface de la terre c'est que les dimens. de la terre sont insensibles par rapport aux distances de la terre aux étoiles. — Ceci résulte aussi de ce que les distances angulaires des étoiles, ne varient pas quand on se déplace à la surface de la terre. — Une dernière preuve de la distance des étoiles c'est que dans le tel. astr., on n'obtient jamais de diamètre sensible. — Et de la plusieurs peuvent cacher une étoile. Donc les dimens. de la terre sont nulles par rapport à la distance de la terre aux étoiles.

Si on marche vers le nord par exemple, la distance de l'étoile à l'horizon varie. ~~Dans~~ le plan de l'horizon s'incline toujours sur l'axe dans le même sens en marchant vers le nord (le plan de l'horizon est le plan tang. à la surface de la terre). — Le phénomène analogue se fait si on s'avance vers l'est ou vers l'ouest. Les étoiles paraissent passer au méridien plutôt ou plus tard qu'au point de départ. Ceci montre que le plan du méridien s'incline vers l'est ou vers l'ouest, et partout le plan tang. dans de quelque côté qu'on s'avance le plan tangent à la surface, s'incline toujours dans le même sens. Ce caractère ne peut appartenir qu'à une surface convexe.

Cette conséquence résulte encore d'observations faites au bord de la mer. — Quand un navire s'éloigne, ce sont les parties supérieures qui disparaissent en premier lieu — d'où résulte de ce que la surface de la mer est nécessairement convexe. — L'observat. peut se placer sur le navire qui s'éloigne à la côte, en observant une tour, une montagne. Donc la terre est un globe convexe isolé dans l'espace. Les voyag. de circumnavigation le prouvent. —

Cours d'astronomie.



Idée physique de la forme de la terre. — on peut observer en pleine mer le bord de la mer; si l'observat. est en O, l'il ~~observe~~ mesure l'angle COA, et trouve que cet angle est à peu près constant quel que soit le point A du bord de la mer. —

Le bord apparent de la mer est déterminé par le contact de la terre avec le cône circonscrit qui a pour sommet l'œil de l'observateur. l'observat. prouve que ce cône circonscrit est un cône droit; si on admet ceci comme rigoureux, il en résulte que tout cône circonscrit à la sphère terrest. est un cône droit. or cette propriété ne peut appartenir qu'à une sphère. ×

Mais ceci n'est pas rigoureusement exact. donc cette conclust. n'est qu'approchée. — ; nous nous en servirons comme première approximation.

Cette observat. peut donner une valeur approchée du rayon terrestre. Soit A un objet situé ~~à la surface de la mer~~; et supposons que l'observat. ~~se trouve quelque part en A du pays et peut déterminer la hauteur OC de l'observat. au dessus de la mer et la distance OA = a~~

Soit $OC = h$ l'observateur est en O; on mesure l'angle $COB = \alpha$. B est un point du bord apparent de la mer. Soit $AC = R$. le triangle AOB donne $R = (R+h)\tan\alpha$. d'où $R = \frac{h\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$.

l'angle α diffère peu de $90° -$ soit $\alpha = 90 - \varepsilon$. il vient

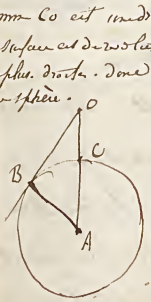
$R = \frac{h\cos\varepsilon}{1-\cos\varepsilon}$ ou sensiblement $R = \frac{h}{\frac{\varepsilon^2}{2}} = \frac{2h}{\varepsilon^2}$.

ainsi pour $h = 100^m$, ε est égal à $1°$ — donc $\varepsilon = \frac{\pi}{180}$ —

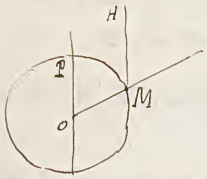
Substituant on trouve $R = 6340000$ —. pour avoir plus d'approximat, il aurait fallu tenir compte de la réfraction. —

Si par le centre de la terre on mène un plan parallèle à l'axe du monde, on aura l'axe terrestre qui rencontre la terre aux pôles terrestres. tout plan passant par l'axe terrestre, coupe la sphère suivant un grand cercle qui est un méridien terrestre. —

× Car considérons le cône circonscrit dont le sommet est sur la verticale CO; le cône étant tout de révolut. autour de CO, la terre étant l'enveloppe de tous les cônes, sera elle-même de révolut. autour de CO. et comme CO est indéterminé, la surface est de révolut. autour de plus. droites. donc la terre est une sphère.



méridiens terrestres.
equateur terrestre.
parallèles terrestres.

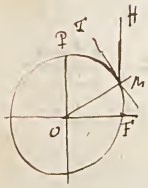


En un point le méridien terrestre se confond avec le méridien céleste du même point. En effet soit un point M à la surface de la terre. Le méridien céleste en ce point est déterminé par la verticale OM, et par une parallèle à l'axe du monde menée par le point M. Cette plan OMH. Au point M le méridien terrestre est déterminé par la verticale OM et l'axe terrestre qui est parallèle à MH. Ces deux plans passent par une même droite et deux droites parallèles, donc ils se confondent. – équat. terrestre – parallèle

latitude – longitude

Pour fixer la posit. d'un point à la surface de la terre on imagine le méridien PMP' qui passe par ce point, et qui coupe l'équat. en Q. MQ est la latitude du point; EQ est la longitude du point M. – La latitude se compte de 0 à 90° – on dit si elle est boréale ou australe – la longitude se compte de 0 à 180°. on dit si elle est orientale ou occidentale. – le choix du mér. méridien est arbitraire. –

La latitud. d'un lieu est la même chose que la hauteur du pôle au dessus de l'horizon en ce lieu. la latitude de ce point est MOF. ; mais HMI = MOF. or HMI est la hauteur du pôle au dessus de l'horizon – la dist. zénithale du pôle est le compl. de la latitude –



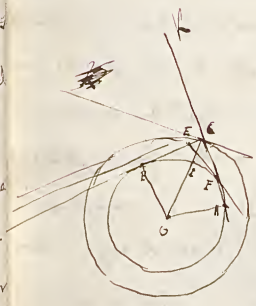
toutes ces définitions supposent que la terre est sphérique sans cela elles ne seraient plus exactes. Nous verrons comment il faut modifier ~~la composition~~ définition quand la terre n'est plus considérée comme sphère

refraction –

La terre est enveloppée d'air, dont la densité diminue à mesure qu'on s'élève. – Si on admettait la loi de Mariotte si la temp. était uniforme partout, et si on admettait que la hauteur décroissant en progression arithmétique, les densités décroissaient en progression géométrique

alors l'atmosphère s'étendrait indéfiniment. ~~Mais~~ Mais il n'en est pas ainsi. — La terre a un mouvement de rotation sur elle même. Il en résulte qu'à une certaine distance du centre la force centrifuge doit être égale à la pesanteur, et alors à une distance plus grande, les couches d'air au lieu d'être attirées seraient repoussées. — Donc l'atmosphère n'est limitée.

D'autres phénomènes indiquent l'atmosphère comme étant très limitée. C'est le crépuscule — quand le soleil est couché, on reçoit encore de la lumière solaire, et on n'en reçoit plus quand le soleil est abaissé ~~au dessous~~ de 18° au dessous de l'horizon.



Voy. ce qu'en peut tirer de là. Supp. que les rayons solaires aient la direction ABC à un certain moment. Ce rayon en traversant les couches d'air éprouvera des réflexions, de sorte qu'il éclairera des points situés au dessous de l'horizon du soleil. — Soit C le point où le rayon BAC rencontre la dernière couche d'air. Si par le point C on mène la tangente CH le point H sera le dernier point recevant de la lumière du soleil. Donc au moment où les rayons solaires auront la direction ABC le crépuscule cessera en H; ~~le point C forme le plan tang.~~ l'observation prouve qu'à ce moment l'angle ACK = 18°. — Car ACK est l'angle dont s'est abaissé le soleil au dessous de l'horizon. — Il en résulte BOH = 18° GOH = g° — Soit GOH = α Soit CI = h.

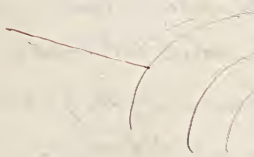
On déduit de là au moyen du triangle OCH $R = (R+h)\cos\alpha$

d'où $h = \frac{R(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}$. D'où on trouve $h = \frac{1}{100}R$ à peu près.

..... D'autres phénomènes conduisent aux mêmes résultats; les aurores boréales par exemple.

le rayon lumineux en pénétrant dans l'atmosphère se réfractent ; par suite les astres ne sont pas vus dans leur position réelle. –

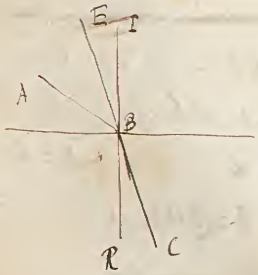
Dans la théorie de la réfraction on peut admettre que la terre est sphérique et que l'atmosphère se compose de couches concentriques dont la densité est la même pour une même couche – Le réfract. ne peut altérer que les distances zénithales. imaginons le plan passant par la direction primitive et le centre de la terre. –, les rayons réfractés ne sortent pas de ce plan



ils ne seront dévié ni à droite ni à gauche. La distance zénithale de l'astre est altérée ; mais l'azimuth de l'astre reste le même. –

Si on n'admettait pas ainsi que la densité variait à une même distance du centre de la terre ; les rayons pourraient être déviés à droite ou à gauche ; ce qui faut noter de fond des observations sur le bord de la mer, dans des moments de tempêtes, etc. – ; les observations alors ne montreraient pas autant de constance.

Si un astre est au zénith la réfraction est nulle. Si on mesure l'astre s'éloigne du zénith, la réfraction augmente. ; car le rayon lumineux traverse la couche atmosph. de plus en plus obliquement. – Soit un rayon en AB ... qui se réfracte suivant BC. l'astre au lieu d'être vu dans le prolongement de BA sera vu dans la direction BE, l'angle ABE est ce que l'on appelle la réfraction soit ε cet angle.



Soit n l'indice de réfract. du prem. milieu par rapport au second et soit n très peu différent de 1 ; c'est ce que nous avons quand un rayon passe d'une couche dans la suivante. Soit $\alpha = ABI$. alors $CBR = \alpha - \varepsilon$.

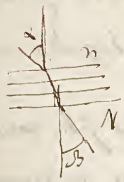
on a alors $\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\varepsilon)} = n$. d'où

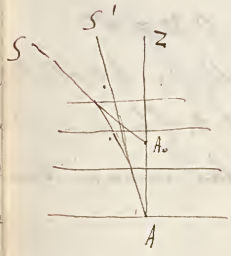
$\sin\alpha = n(\sin\alpha\cos\varepsilon - \cos\alpha\sin\varepsilon)$ ou $\sin\alpha = n\sin\alpha - n\cos\alpha.\varepsilon$.

d'où $\varepsilon = \frac{n-1}{n}\,\mathrm{tg}\,\alpha$ – donc ε est d'autant plus grand que α est plus grand, ou ce qui est la même chose, que le rayon traverse la couche atmosph. plus obliquement.

Cours d'Astronomie.

quand l'astre s'écarte peu du zénith, les divers couches qu'il traverse peuvent être considérées comme terminées par des faces parallèles. Sensiblement alors on peut calculer la réfraction. Si plus. milieux sont terminés par des surfaces parallèles, si un rayon traverse ces milieux, la réfraction ne dépend que de l'angle d'incidence sur le 1er milieu, et des indices de réfraction du premier et du dernier milieu. Soient n et N les indices absolus du 1er milieu et du dernier. on a $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{N}{n}$ l'angle β est le même que si le milieu ray. était passé immédiat. du 1er milieu dans le dernier. — dans l'atmosphère le rayon vient du vide. —





A est la distance zénithale apparente ; l'angle $S'A_0Z$ est la distance zénithale vraie. alors $A_0 - A =$ la refract. $= \lambda$. on aura

$$\sin A_0 : \sin A :: N : n. \quad \text{remplaçant les sinus par les angles}$$

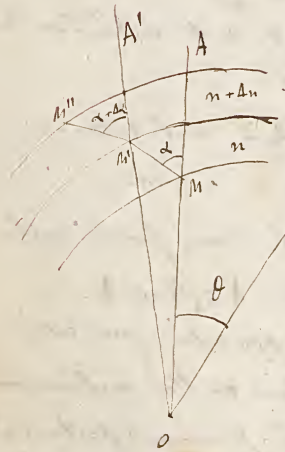
$$\frac{A_0}{A} = N \quad \text{d'où} \quad A_0 = NA. \quad \text{d'où } \lambda = (N-1)A.$$

λ est ce qu'il faut ajouter à la distance zénithale apparente pour avoir la distance zénith. vraie. N est l'indice de réfraction de l'air au lieu même de l'observation — il faut avoir N. — La puissance réfractive de l'air est N^2-1, elle varie proportionnellement à la densité ; on peut écrire $N^2-1 = C\rho$. ; mais la densité ne se mesure pas directement ; soit h la hauteur du baromètre, t la température ; on a $h = K\rho(1+\mu\theta)$. μ étant le coeff. d. dilat. de l'air — d'où $n^2-1 = \frac{Ch}{K(1+\mu\theta)}$. Donc connaissant n^2-1 pour une pression et une temper. déterminée, on l'aura pour une autre pression et une autre temper. $n_0^2-1 = \frac{C \cdot 0,76}{K}$. alors

$n_2-1 = (n_0^2-1)\frac{h}{0,76} \cdot \frac{1}{1+\mu\theta}$ — L'indice de réfraction diffère très peu de 1 $n_0 = 1,000294$; or $n^2-1 = (n+1)(n-1) = 2(n-1) + (n-1)^2$; on en négligeant le carré de $(n-1)$, on peut écrire $n^2-1 = 2(n-1)$; d'où l'éq. devient — $n-1 = (n_0-1)\frac{h}{0,76}\frac{1}{1+\mu\theta}$. et $n_0-1 = 0,000294$ — ainsi connaissant A, h, et la temper. on aura N. —

Tant que la distance zenithale ne dépasse pas 25° — les calculs donnent des resultats assez exacts. Si on suppose $t=0$, $h=0,76$ on aura $N-1=\frac{1}{3400}$. — Si on supposoit $t=16°$, $h=0,76$, on a $N-1=\frac{1}{3600}=\frac{1}{60^2}$. Comme la correction est $(N-1)A$, ceci montre qu'il faut ajouter à l'angle trouvé, autant de secondes qu'il contient de degrés. —

Quand la distance zénithale dépasse 25° — ceci n'est plus exact. Si pour chaque distance r d'une couche au centre de la terre, on connoissoit l'indice de refraction de cette couche, on pourroit determiner la refract. par une simple question de calcul. — Considérons deux couches consecutives.



Soit $M'MA=\alpha$. ; $M''M'A'=\alpha+\Delta\alpha$. $OM=r$.

$OM'=r+dr$. — n l'ind. de refract. absolue de la couche M, $n+\Delta n$ celui de la couche suivante. — Soit θ l'angle que OM fait avec un direct. fixe OI ignée dans la place du rayon lum. Soit $\theta+\Delta\theta=M'OI$. —

L'angle ~~de refraction~~ d'incidence est $\alpha+\Delta\alpha$; l'angle de refraction est $\alpha-\Delta\theta$. donc

$$\frac{\sin(\alpha+\Delta\alpha)}{\sin(\alpha-\Delta\theta)}=\frac{n}{n+\Delta n}$$

$$(n+\Delta n)(\sin\alpha+\Delta\alpha\cos\alpha)=n(\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\Delta\theta).$$

$$\Delta n\cdot\sin\alpha+n\cos\alpha\cdot\Delta\alpha=-n\cos\alpha\cdot\Delta\theta.$$

en negligeant le terme du 2e ordre; passant à la limite

$$dn\sin\alpha-n\cos\alpha\,d\alpha=-n\cos\alpha\cdot d\theta.$$

Telle est l'equat. qui ~~a~~ détermine la trajectoire décrite par le rayon lumineux; on peut lui donner une forme plus simple; on sait que $tg\,\alpha=\frac{r\,d\theta}{dr}$; divis. les eq. precedentes par $\sin\alpha$ elles deviennent

$$\frac{dn}{n}+\frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sin\alpha}+\frac{dr}{r}=0. \quad \text{d'où}$$

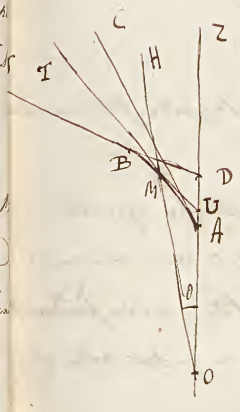
$$nr\sin\alpha=\text{Constante}$$

C'est une equat. ~~entre~~ du 1er ordre ~~entre~~ car α depend de $d\theta$ et de dr. —

Soit A la dist. zenith apparente; A est la val. de α au lieu de l'observation. Soit N l'indice de refract. au lieu de l'observat. R la dist. de ce lieu au centre de la terre — l'equat. devient

$$nr \operatorname{sh} \alpha = NR \operatorname{sh} A.$$

Soit un rayon lumineux penetr. dans l'atmosphere et arrivant en A. ZAC est la dist. zenith. app.; SDZ est la dist. zenith vrai appelée A_0 —. l'origine des points M de la trajectoire; menons la tangente en M, on a



$IMH = \alpha$ $\quad OM = r$. $\quad MOA = \theta$. soit $MUZ = \delta$.

Si on trouve la differentielle de δ, si l'intégre tout le long de la trajectoire, on aura evidemment $A_0 - A$ ou la refraction.

or on a $\quad \delta = \theta + \alpha = \theta + UMO$ $\quad$ au point A $\delta = A$, B. $\delta = A_0$.

$$d.\delta = d\theta + d\alpha.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r\,d\theta}{dr} \quad \text{d'où} \quad d\theta = \frac{dr}{r} \operatorname{tg} \alpha.$$

Mais $\operatorname{sh} \alpha = \dfrac{NR \operatorname{sh} A}{nr}$. d'où $\operatorname{Cos} \alpha = \dfrac{\sqrt{n^2r^2 - N^2R^2 \operatorname{sh}^2 A}}{nr}$.

Donc
$$d\theta = \frac{NR \operatorname{sh} A\, dr}{r\sqrt{n^2r^2 - N^2R^2 \operatorname{sh}^2 A}}.$$

Calcul. $d\alpha$ — on a

$$\operatorname{Cos} \alpha\, d\alpha = - \frac{NR \operatorname{sh} A\,(n\,dr + r\,dn)}{nr^2}.$$

d'où
$$d\alpha = - \frac{NR \operatorname{sh} A\,(n\,dr + r\,dn)}{nr\sqrt{n^2r^2 - N^2R^2 \operatorname{sh}^2 A}}.$$

donc

$$d\delta = - \frac{NR \operatorname{sh} A.\, dn}{n\sqrt{n^2r^2 - N^2R^2 \operatorname{sh}^2 A}}.$$

il faut intégrer depuis A jusqu'à B. — ce qui donne

$$A_0 - A = -\int_N^1 \frac{NR\sin A\,dn}{n\sqrt{n^2y^2 - N^2R^2\sin^2 A}}.$$

Or au point A $n = N$ et au point B, $n = 1$. Donc

$$A_0 - A \text{ ou } \lambda = NR\sin A\int_1^N \frac{dn}{n\sqrt{n^2y^2 - N^2R^2\sin^2 A}}.$$

Si donc on connaît n en fonction de δ, l'intégrale pourra être calculée. —

A l'aide de cette formule, Laplace a montré que la distance zénithale ne dépassant pas 80°, on peut au moyen de cette expression, obtenir une expression de la réfraction ne dépendant que de N, R, A.. Or en supp. $A < 80°$ on a sensiblement

$$\lambda = m\,\mathrm{tg}\,A\left[1 + \frac{\frac{m}{2}(2\cos^2 A + 1) - \frac{h\Delta}{R}}{\cos^2 A}\right]$$

h est la hauteur du baromètre; Δ est le rapport de la densité moyenne à la densité de l'air dans les circonstances normales. à 0° et 0,76 — . m est une quantité de la forme $\frac{kh}{1+\mu t}$.

alors λ est de la forme $\lambda = nk + pk^2$. — détermi. k —, on l'détermine par des observations. — observons la distance zénithale d'une étoile au moment de son passage supérieur, et en même temps h, et t. on connaîtra n et la distance zénithale vraie sera $z + nk + pk^2$; au passage inférieur la distance zénithale vraie sera de même $z' + n'k + p'k^2$; mais la dernière est égale à la distance zénithale du pôle. donc.

$$z + z' + k(n+n') + k^2(p+p') = 2 \text{ distance zénithale du pôle.}$$

en faisant la même chose pour une 2e étoile nous aurons encore la

Ligniez

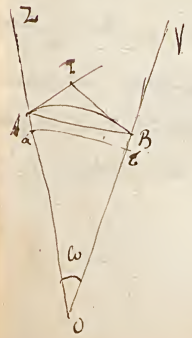
Cour. d'astronomie.

double de la distance zénithale du pôle; en égalant les deux expressions nous aurons une équation qui servira à déterminer K.

La formule ne s'applique plus quand les astres sont voisins de l'horizon; on le voit aisément; car tg A devient infinie; le terme que l'on a négligé ne peut plus l'être. Pour calculer la réfraction on est obligé de faire ~~les~~ des hypothèses sur la constitution physique de l'atmosphère. Pour une distance zénithale de 90°, la correction est de 34', à la temp. de 10°, et sous la pression 0,76. —

La réfraction explique des apparences bizarres, elle élève les astres d'autant plus qu'ils sont plus bas. dans elle est plus grande pour le bord inférieur du soleil que pour le bord supérieur. il en résulte que le soleil étant près de l'horizon, son diamètre doit être diminué dans le sens vertical. ordinairement on voit une diminution de $\frac{1}{9}$; sur une montagne au bord de la mer, on peut voir une diminution de $\frac{1}{5}$. —

réfraction terrestre. au lieu de voir un objet A suivant AB, on le voit suivant BC; c'est seul la distance zénithale de l'objet qui est altérée. si l'on connaissait la loi de la densité de l'air, nous aurions ~~dans~~ la déviation en intégrant. la formule connue entre des limites convenables. —



de déterminer la réfract. terrest. par l'observat. de distance zénith. réciproques. supp. que 2 obs. situés en A et B déterminent réciproq. leurs distances zénithales. pour A, la dist. zenith. de B est l'angle BAZ; mais celle observée est ZAI. soit ZAI = z l'obsev. situé en B voit l'objet suivant BI, et la dist zenith. observée est VBI; soit VBI = z'. soit ω = AOB. O est le centre de la terre. soit ρ = IAB. ρ' = IBA.

on a $ZAB = z + \rho$.

$OAB = \pi - z - \rho$.

$OBA = \pi - z' - \rho'$. donc

or dans un triangle la somme des angles égale deux droits. Donc

$$\pi - z - \rho + \pi - z' - \rho' + \omega = \pi.$$

d'où

$$\rho + \rho' = \pi - z - z' + \omega. -$$

l'angle ω peut être connu quand on connaît la dist. des points A, projet. horizontale des points A et B. — ω est très petit, si on connaît une valeur <u>approchée</u> du rayon terrestre on pourra calculer ω.

on peut supposer que $\beta = \rho'$. et cela sans erreur sensible. car A est très peu courbe et la corde AB fait des angles sensibl. égaux avec les tang aux extremités, — la limite de rapport de ces angles est l'unité.

on aura donc $\rho = \frac{\pi}{2} - \frac{z + z' - \omega}{2}$. —

autre effet de la réfraction. — de mer la main pour mesurer la distance zenith. d'un astre, cherche sa distance au l'horizon apparent. le bord de la mer est en réalité au dessous de l'horizon rationnel; la réfract. relève le bord de la mer, et il faut pouvoir connaître la dépression apparente du bord de la mer, dépression qui peut être négative, car il peut se faire que le bord de la mer soit relevé par la réfraction au dessus de l'horizon rationnel. — on pour mesurer la dépression app. du bord de la mer, on se sert d'un instrument de Voltaire au moyen duquel on mesure l'angle de deux tangentes menées par un point à deux bords opposés de la mer. — on peut admettre dans cette circonstance ordinaire que $AOA' = BOB'$; on connaîtra ainsi l'angle $A'OH$; et on a contruit d'abord à certaine hauteur OI; et cet abt fait connaître la dépress. vraie correspondant à la dépression apparente observée. —

Il y a un moyen d'éviter cette cause d'erreur, en se servant d'un horizon artificiel, comme un bain de mercure, on cherche l'angle de l'astre avec son image; on détermine l'angle AOC. la moitié est la hauteur de l'astre au dessus de l'horizon; et le complément est la distance zénithale de l'astre.

Dans le calcul de la réfract. il est inutile de tenir compte de la vapeur d'eau qui est contenue; car la vapeur d'eau peut être supposée tenir la place d'un certain poids de l'air; or dans la cond. normale de temp. et de pression, la vapeur d'eau a une densité moindre que celle de l'air; mais sous la même densité la vap. d'eau a une pouv. réfring. est plus considérable que l'air. Ces deux circonstances se contrebalancent à peu près d'ailleurs.

géodésie. —

La terre a une forme arrondie comme nous l'avons vu. elle n'est pas rigoureusement sphérique — .

le mot vertical désigne en chaque point la normale à la surface; et ici nous entendons la surface de la mer en équilibre, et prolongée sous les continents. —

Sur une surface courbe il y a autant de points où le plan tangent est parallèle à un plan donné; les deux points où la verticale est parallèle à l'axe de la sph. céleste sont les pôles de la terre.

La courbe formée par les points où la verticale est parallèle à un méridien céleste est appelée méridien terrestre. Ce méridien passe nécess. par les deux pôles. que sont comme alors les méridiens. Ce méridien n'est pas en gén. une courbe plane.

Si par un point M d'un méridien terrestre, on mène la verticale et un parallèle à l'axe de l'espace céleste, ces deux droites déterminent un plan parallèle au méridien céleste; ce plan est le plan méridien pour le point M. — les plans méridiens corresp. aux points d'un méridien terrestre sont parallèles entre eux; mais ils ne se confondent pas. —

on peut dire encore qu'un méridien terrestre est le lieu des points pour lesquels un même astre passe ~~au même moment~~ en même temps au méridien céleste correspondant.

Si on prend un premier méridien pour origine, la longitude d'un point situé sur un autre méridien, sera l'angle ~~compris~~ compris entre les deux méridiens célestes correspondants.

On appelle latitude l'angle que la verticale du lieu fait avec l'équateur ~~terrestre~~ céleste.

Le parallèle terrestre est le lieu géométrique des points qui ont la surface de la terre ont la même latitude. La ligne de la terre étant cette ligne peut se faire en plan —

Le lieu des points pour lesquels la latitude est nulle est l'équateur terrestre.

Rig. ce que doivent ~~à~~ définir en supp. la terre devoir autour d'un axe parallèle à l'axe du monde. —

De ce cas les pôles sur les extrémités de l'axe de rotation qui alors est appelé axe de la terre, puisque en A et B la normale est parall. à l'axe du système céleste.

Les méridiens sont des courbes planes; un plan qlq. passant par AB coupe la surface suivant une courbe dont toutes les normales sont dans un même plan, et par suite parallèles à un même méridien céleste. Dans les méridiens sont des courbes planes.

Si l'on coupe la surface par un plan perpend. à l'axe on a un cercle et les normales le long de ce cercle font le même angle avec l'axe de la terre; donc les parallèles sont des petits cercles — l'éq. terrestre est aussi un cercle. — ; et la latitude est l'angle de la normale en un lieu avec l'équateur terrestre. —

~~Des~~ Ensuite à supposer la terre sphérique sa grandeur sera déterminée par sa rayon; pour cela il suffit de connaître la longueur d'un arc de cercle et l'angle correspondant; c'est ad l'angle qu'font entre elles les deux verticales menées aux extrémités de l'arc.

Cours d'Astronomie. Lignier 9

il faut d'abord tracer une ligne méridienne. on se place en une première station, et on dresse en A une lunette méridienne, qui détermine le plan du méridien. on en certain dist. on place en mire B, dans le prolongement de l'axe optique de la lunette. on se transporte en B en la lunette, et on regarde l'objet A; puis on retourne la lunette, et on place une mire C dans la direction de la lunette. — L'axe de la lunette est toujours horizontal — on continue ainsi; on trace ainsi à la surface de la terre une ligne qui est un méridien. en effet au point A la lunette est dans le méridien; dans le point B est dans le plan du méridien. Maintenant au point ~~A on a mis la lunette~~ B la lunette se meut dans le plan du méridien, et on place la mire C dans la direct. de l'axe optique de la lunette; dans le point C le trouve dans le méridien et ainsi de suite

B

1 C

D

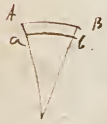
la terre est immobile. la ligne ainsi tracée sera donc un méridien —

la terre est gly, la ligne ainsi tracée sera geodesique; elle est la distance la plus courte entre deux d. ses points. en effet en B par exemple, quand on fixe les points A et C, l'axe de la lunette est horizontal; et quand on fixe les points A et C la lunette est toujours perpend. à son axe, donc le plan ABC est perpendiculaire à l'axe de la lunette, et par conséquent vertical puisque l'axe de la lunette est horizontal; or ABC est le plan osculateur de la ~~surface~~ courbe; donc cette courbe a en tous ses points le plan osculateur normal à la surface. Donc la ligne tracée est une ligne geodesique —

revenu à notre prem. hypoth. supp. la terre sphérique. — il faut mesurer l'angle du vertical aux deux extrémités, et à chaque point on détermine la distance zénith. du pôle, et la différence donne l'angle cherché; — il faut connaître ensuite la distance comprise entre les deux extrémités. — un le est d'une règle métallique que porte à leur extrémité du trépied avant à mettre la règle dans la direct. convenable et à tous règles qui dépendent une à la suite des autres*; on maintient toujours la règle horizontale au moyen de niveaux; de cette manière on mesure la distance, non pas des deux points, mais de leur projection sur la surface de la mer. — Si les deux points A et B restent sur la surface de la terre telle que nous l'avons définie, ~~ce qui est sur~~ ~~sont~~ a et b leur projet. sur la surface de la terre, ce qui il faut mesurer le n'est pas AB, mais ab — ;

* Les règles sont protégées par des tréteaux contre l'act. des rayons solaires qui pourraient faire varier la longueur de la règle, du reste un therm. indique la tempér. et indique les corrections. quand les 3e ont place, on prend la peine pour les mettre à la suite de la 3e etc —

Supp. A et B à une même hauteur au dessus de la surface, soit h cette hauteur. on aura $AB : ab :: R+h : R$ d'où



$$ab = AB \cdot \frac{R}{R+h}.$$

Supp. que A et B restent pas à la même hauteur. alors mesure seulement l'arc mn mené par le milieu de l'arc AB.

et l'on aura $$ab = mn \frac{R}{R+h}$$

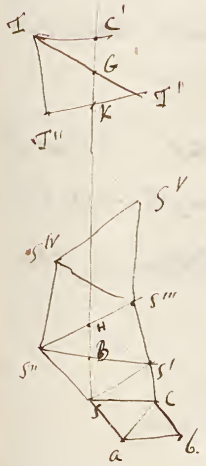
h étant la moyenne arithmétique des hauteurs au dessus du niveau de la mer au point A et au point B.

Nous venons bientôt connaître mesure la haut. d'un lieu au dessus du niveau de la mer.

On détermine ainsi le ~~distance AB~~ longueur d'un arc de la surface terrestre soit A cette longueur, soit α l'angle du deux verticaux extrêmes; on aura

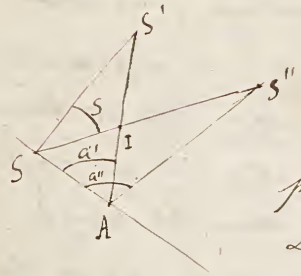
$$A : 2\pi R :: \alpha : 360 \text{ d'où } R = \frac{180 \cdot A}{\alpha \cdot \pi}.$$

Cette opérat. a été faite dans les états unis ou elle y a des plaines considérables; en France cette opér. serait inexécutable. —



Quand le terrain ne permettra pas de la opérat. on fait ce qu'on appelle ~~lat~~ une chaîne de triangles, de telle sorte que le méridien de la première station ~~soit~~ traverse tous les ~~mêmes~~ triangles; soit I' la dernière station par le point I s'il a mené un parallèle terrestre, ce parallèle coupera le méridien du point S, en C'; et on ~~demande~~ de mesurera la longueur du méridien compris entre S et C'. Si maintenant on mesure la latitude en S et en I', on aura les éléments nécessaires pour calculer le rayon terrestre. On choisit près du point S un emplacement ou l'on puisse tracer une base ab de quelques mètres; elle est ordinairement beaucoup moins grande que les côtés SS', SS'' etc. On réduit ab au niveau de la mer, et on rattache la chaîne de triangles à la base ab; ab étant connue, on mesure les angles Cab et Cba réduits à l'horizon. C est une station commodément choisie; on peut calculer le triangle Cab; en continuant ainsi on pourra calculer les autres triangles, et les longueurs des parties du méridien contenues dans ce méridien; ~~on calculera SB, BH, etc.~~ on pourra calculer SS'. Puis en S, au moyen du théodolite on mesurera l'angle BSS'. on mesure BS'S; connaissant SS' et les deux angles adjacents on calculera SB; en connaissant BSS'' et SBS'' qui est le suppl. de SBS', on calculera BS''; dans le triangle S''BH, on connaîtra l'angle en B, et l'angle en S''; BS'' étant calculé; on calculera BH. et ainsi de suite. Pour calculer GC', on remarque que l'arc de parallèle IC' se confond sensiblement avec la perpend. abaissée de I sur GC'; on peut supposer IC'G comme rectangle en C', et on pourra calculer GC', puisque on connaîtra GI et IGC'. Dans un premier approximat. on pourra calculer les triangles comme rectilig. et avec plans.

Dans le choix de station il faut prendre des objets visibles de loin et aisés à reconnaître comme la flèche d'une cloche, le sommet d'une montagne ou d'un planté isolé; il faut en outre de plus que les angles des triangles soient très aigus. Lorsque on a adopté pour station un clocher, on peut mesurer les angles à la station, il faut faire l'observat. de manière à pouvoir en faire les correct. suivantes.



Sur le point S choisi comme stat. S' et S'' autre stat; avant avoir l'angle S'S S''; on ne peut se placer en S. l'observat. faite peut determiner l'angle $S'AS'' = a'' - a'$.

Les triangles SIS' et AIS'' donnent

$$S + S' = A + S''.$$

Donc $S = A + S'' - S'$

mais le triangle SAS'' donne

$$\sin S'' : \sin a'' :: SA : SS'' \quad \text{donc}$$

$$\sin S'' = SA \cdot \frac{\sin a''}{SS''}.$$

on peut mesurer $SA = \delta$, SS'' le connaît au moins par approximation, comme S'' est petit on peut poser

$$S'' = \delta \cdot \frac{\sin a''}{SS''}.$$

le calcul de même $S' = \delta \frac{\sin a'}{SS'}$. Donc

$$S = A + \delta \left(\frac{\sin a''}{SS''} - \frac{\sin a'}{SS'} \right).$$

Leçons

Cours d'Astronomie. -

Nous avons vu que pour calculer la long. d'une ou de mend., dans une première approximation, on ~~a considéré~~ pouvait considérer les différents triangles comme rectilignes. - mais dans l'étendue d'un de ces triangles, on peut considérer la terre comme régulièrement sphérique, et dont le centre est le centre du rayon pour appui —

Soient A, B, C — les angl. d'un triangle sphérique —

α, β, γ les cotés ~~qui sont les côtés opposés aux angles A, B, C~~ corresp. à a, b, c d'un triangle sphérique de rayon 1

a, b, c les long. de cotés mesurés avec l'unité de longueur.

alors $\alpha = \frac{a}{R}$ $\beta = \frac{b}{R}$ et $\gamma = \frac{c}{R}$ quantités très petites — car a, b, c sont très petits relatifs à R.

on a $\cos\alpha = \cos\beta \cos\gamma + \sin\alpha \sin\beta \cos A$.

ou bien développé en série

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} = \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4}\right) + \left(\frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3}\right)\left(\frac{c}{R} -\right.$$

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} = 1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4} - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{b^2c^2}{4R^6} + \frac{c^4}{24R^4} + \left(\frac{bc}{R^2} - \frac{b^3c}{6R^4} - \frac{bc^3}{6R^4}\right)\cos A$$

en négligeant les termes qui contiennent au dénominateur R à un degré plus élevé que le 4e multiplier tout par $2R^2$ et chang. les signes il vient

$$a^2 - \frac{a^4}{12R^2} = b^2 + c^2 - 2bc\cos A - \frac{b^4 + c^4}{12R^2} - \frac{b^2c^2}{2R^2} + \frac{b^3c + bc^3}{3R^2}\cos A.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2 + 4bc(b^2+c^2)\cos A}{12R^2}$$

Si on regardait R comme infini on retrouve l'éq. que on a eue dans un triang. rectiligne. -

Soient A', B', C' les angl. du triang. rectiling. dont les cotés auraient pour longueur $a\ b\ c$ on aura

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A'.$$

retranchant membre à membre cette équation de la précédente —

21v

$$2bc(\cos A - \cos A') = \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2 + 4bc(b^2+c^2)\cos A}{12R^2}.$$

Ceci montre que la diff. entre A et A' est très petite ; afin d'avoir ceci en remplaçant la diff. des cosinus par le produit ... pour mettant de la ~~[illegible]~~ entre $\cos A'$ au lieu de $\cos A$ ~~[illegible]~~ prenant $\frac{A'-A}{2}$ au lieu de $\sin\frac{A'-A}{2}$ ce qui est permis, il vient

$$4bc\left(\frac{A'-A}{2}\right)\sin\frac{A+A'}{2} \text{ ou } 2bc\left(\frac{A'-A}{2}\right)\sin A'.$$

$$2bc(A'-A)\sin A' = \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2 + 2\cancel{a^2}(b^2+c^2-a^2)(b^2+c^2)}{12R^2}$$

ou bien $A'-A$; remarq. que $bc\sin A'$ est le double de la surface du triangle rectiligne considéré ; soit $2S$ cette surface. on aura

$$A'-A = \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2 + 2b^4 + 2c^4 + 4b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2}{48SR^2}$$

$$A'-A = \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 - 2a^2b^2}{48SR^2}.$$

où le numérateur est le carré de la surface du triangle rectiligne à un facteur près. on a

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)\ldots}$$

d'où en tirant $-16S^2 = a^4 + b^4 + c^4 - (\ldots)$

Donc

$$A - A' = \frac{16S^2}{48SR^2} = \frac{S}{3R^2}.$$

on pourrait dire la val. de $A'-A$ est symétrique en a, b, c

donc $A'-A = B'-B = C'-C = \frac{1}{3}\left[\varpi - (A+B+C)\right]$.

or la surface du tri sphér. pour laquelle on peut prendre S est égale à $(\pi - A - B - C)$, $\pi - A - B - C = \frac{S}{R^2}$.

Donc $A - A' = \frac{1}{3}\frac{S}{R^2}$ — etc

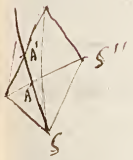
On a donc

$$A' = A - \frac{S}{3R^2} \quad B' = B - \frac{S}{3R^2} \quad C' = C - \frac{S}{3R^2}.$$

et $A' + B' + C' = A + B + C - \frac{S}{R^2}$.

Cette quantité $\frac{S}{R^2}$ est ce qu'on nomme l'exc. sphérique;

voy. l'usage que nous fis de cet excès.



Considérons le triangle $SS'S''$ — à mesurer les trois angles, A, B, C.

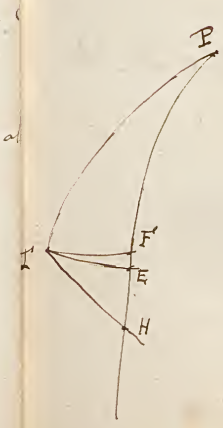
faisons la somme qui est > 2 droits — soit $A + B + C - \varpi = \varepsilon$

ε est l'exc. sphérique — on aura

$$A - \frac{\varepsilon}{3} = A' \quad B - \frac{\varepsilon}{3} = B' \quad C - \frac{\varepsilon}{3} = C'$$

A', B', C' sont les angles d'un triangle rectiligne dont les côtés ont même longueur que les côtés du triangle sphérique $SS'S''$; connaissant les côtés, on calcule les 2 autres, comme si le triangle était rectiligne, mais en employant pour angles adjacents les angles A' et B' calculés comme nous l'avons dit. — Mais cela suppose qu'on ~~connaît~~ puisse mesurer les trois angles A, B, C. —

Comment faire l'opération le triangle SAA' dans lequel on ne peut pas mesurer les trois angles. Dans ce triangle on connaît un côté et deux angles adjacents. On résout le triangle comme rectiligne, (ce qui donne une approximation suffisante puisque le divise par R^2) on a ainsi $\frac{S}{R^2}$ ou l'exc. sphérique. et alors on a aussi facilement les angles du triangle rectiligne.



Dans le calcul de dernier triangle ~~il~~ il faudrait mesurer un arc de parallèle, et alors on n'avancerait pas un triangle sphérique puisque IE n'est pas un arc de grand cercle; alors on mène par I un arc de grand cercle IF perpendiculaire à HE; et on résout on calcule FH au moyen du triangle rectangle FIH;

Mais ce qu'on veut c'est EH ; depuis que de l'a longueur FH, il faudra retrancher la longueur EF. il faut donc calculer EF. soit P le pôle de la terre ; prolongeons le merid. HF jusqu'au pôle. menons par le point F le meridien TP. on a TP = EP. alors

EF = EP - FP = TP - FP. mais on a un triangle spherique TFP rectangle en F, on connaît TF et TP. soit TF = β, TP = α. il faut calculer FP = γ. or on a

$\cos\alpha = \cos\beta \cos\gamma$ d'où $\cos\gamma = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$. EP étant connu on le retranche de EP = α. et on aura EF = α - γ ; on a

$$\cos\gamma - \cos\alpha \text{ ou } 2\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\cos\alpha(1-\cos\beta)}{\cos\beta} = 2\cos\alpha\,\frac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$$

ou approximativement $(\alpha-\gamma)\sin\alpha = \cos\alpha\,\frac{\beta^2}{2}$ d'où $\alpha-\gamma = \frac{\beta^2}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.

donc on aura EH en retranchant (α-γ) de EF. —

En opérant ainsi sur un même merid, mais à des latitudes différentes, l'arc d'un degré n'a pas la même longueur ; dans le meridien n'est pas un cercle.

Mais sur diff. merid, à des latitud. égales, on obtient des résultats sensiblement concordants ; — de plus sur une même parallèle, à des differ. de longitud. égales correspondent des arcs égaux de la deux dernières observation, il résulte qu'une terre peut être considérée comme une surface de révolution

alors les lign. géod. que nous avons tracées sont donc des meridiens. —

étudions la forme du meridien —

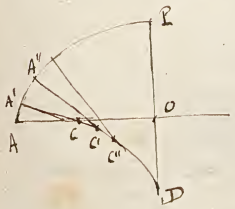
au Pérou	dat. moy. au pôle de l'arc	88°, 28', 59" ;	1° =	56737 toises —
Inde	l'élévation moyen au pôle de l'arc même	77°, 27', 39", 7	1° =	56762 —
Midi de France	dat. moy. au pôle	45°, 51', 54",	1° =	57025 —
Ecosse	dat au pôle	57° 57' 40"	1° =	57066 —
La France	— —	23° 39' 50",	1° =	57196 —

Lignier

Cours d'astronomie.

Le ray. de courbure du merid. augmente à mesure qu'on s'approche du pôle, il va augm. de l'équat. au pôle, car l'arc d'un degré est un arc tel que les normales menées aux extrémités comprennent un arc de 1°, et comme l'arc de 1° augmente à mesure qu'on s'approche du pôle

On conclut de là l'aplatissement de la terre. Soit AC le ray. de courbure à l'équateur; du point C comme centre, je décris un arc de 1° que je confondrai sensiblement avec le 1er élément du méridien. Pour décrire le second élément du méridien, il faudra prendre un rayon A'C' > A'C du point C' comme centre avec A'C' pour rayon je décris un arc A'A'' de 1°, et on le confond sensiblement avec le second élément du méridien; je continue ainsi au pôle et j'ai avant d'arriver au pôle autant d'arcs de 1°. — or la courbe CC'C''D < CO+OD.



$$\text{ou} \quad AC + CC'C''D < AO + OD.$$

$$\text{ou} \quad AC + PD - AC < AO + OD.$$

$$PD < AO + OD \quad \text{ou} \quad PO < AO$$

Ainsi la terre est aplatie au pôle, mais ceci doit être démontré par suivant quelle loi le ray. de courbure augm. de l'éq. au pôle.

Le calcul prouve que l'accroissement du rayon de courbure est proportionnel au carré du sinus de la latitude, de sorte que l'on a

$$\rho = \rho_0 + c \sin^2 \lambda.$$

En appelant ρ_0 le ray. de courbure à l'équateur. Ceci appartient précisément à l'ellipse. Pour le ray. de courbure calculé en fonction de la latitude il est $\rho = \dfrac{a^2 b^2}{(b^2 \cos^2\lambda + a^2 \sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}$.

$$\text{ou } \rho = \frac{a(1-e^2)}{\left\{(1-e^2)\cos^2\lambda + e^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\cos^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}$$

Développant en série ordonné

$\rho = a\left\{1 + \left(\frac{3}{2}\sin^2\lambda - 1\right)e^2 + \ldots\right\}$ — Dans a negligeant la 4e puissance de l'excentricité ρ est proportionnellement au sinus carré de la latitude.

Ayant deux valeurs du rayon de courbure pour deux valeurs de λ, on déterminera a et e; pour avoir deux valeurs du rayon de courb. à deux diff. et calcul. la long. d'arc de 1° à ces deux latitudes.

Au lieu de calculer l'excentricité, on calcule l'aplatissement ou le rapport $\frac{a-b}{a} = \varepsilon$.

$$\varepsilon = 1 - \sqrt{1-e^2} = \frac{e^2}{2}.$$

en remplaçant e^2 par 2ε on aura deux équations pour déterminer a et ε. — Connaissant a et ε on connaîtra b.

D'après les observations faites en Pérou, en France et Espagne on a trouvé

$$a = 3271985 \text{ toises}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{308^e}$$

$$b = 3261291 \text{ toises.}$$

La diffce $a-b = 10694$ toises — La longueur de l'arc de méridien $= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$, a deux lois; elle sera on a ~~mais~~ plus facile à calculer: on trouve

$$5131276 \text{ toises.}$$

Le mètre est donc $0,^{T}5131276 = 443^{lig}, 362$

Mais quand on a fixé le mètre légal, on avait pris

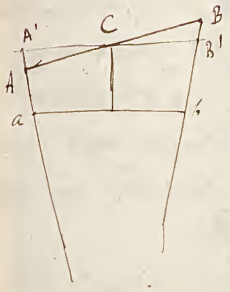
$$0,^{T}5130740 = 443^{lig},296.$$

et c'est encore cette longueur qu'elle prend pour mètre légal; on connaît le rapport au mètre exact.

Le mètre on a $a = 6377218$ mètres

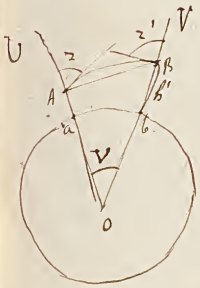
$b = 6356180$ —

Le long de quelque méridien la loi semble se poursuivre tout à fait la loi du carré du sinus, de sorte que la terre ne saurait pas tout à fait de révolution, ce qui s'explique par le manque d'homogénéité —



Nous avons eu besoin d'une triangulation de déterminer la longueur d'une base AB; la longueur doit être réduite au niveau de la mer; supposons que l'on connaisse la hauteur h du point C du milieu de AB au dessus du niveau de la mer. — Soient a et b les projet. de A et B, je mène A'B' parallèle à ab; AB est à peu près égal à A'B'.; on a donc A'B' ou AB : ab :: R+h : R, d'où $ab = AB\frac{R}{R+h}$

Si la base AB est dans l'intérieur des terres, comment déterminer h? on le peut au moyen du baromètre — on peut le faire aussi par les moy. admises, en prolongeant la chaîne de triangles jusqu'au voisinage de la mer; et en déterminant la hauteur de la station la plus voisine de la mer, au moyen du niveau d'ingénieur; la hauteur de cette station étant connue le quart revient à déterm. la diff. des hauts. au dessus de la mer de deux stat. diff. on le peut par l'observ. des dist. zénith. réciproques.



Soient deux points A et B dont les haut. sont h et h'. au point a observe la distance zénith. du point B, et en même temps au point B on observe la dist. zénithal du point A. Soient

$$UAB = z + \delta, \quad VBA = z' + \delta'.$$

z et z' sont les distances zénithales observées; δ et δ' sont les déviat. produites par la réfraction. on connaît ab approximativement; et par suite $\frac{ab}{R}$ donne l'angle V approximativement. Dans le triangle AOB on a : La somme des cotg. : leur différ. :: comme la tangente de la demi somme : la tang. de la demi différence.

$$2R + h + h' : h' - h :: tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{v}{2}\right) \text{ ou } \cot\frac{v}{2} : tg(z' - z + \delta' - \delta).$$

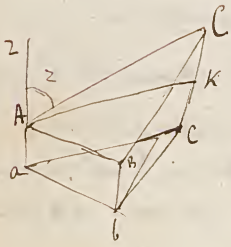
on peut suppos. $\delta = \delta'$; posons $h' = h + x$ il vient

$$2R + 2h + x : x :: \cot\frac{v}{2} : tg(z' - z).$$

on déduit de là la val. de x; et connaissant la haut. du point A, on en déduit celle du point B. on réduit ainsi la base au niveau de la mer, et on aura ainsi la projection du triangl. sur la surf. de la mer prolongée —

par la gêne d'observation par suite atmo que le niveau de l'océan ne
dessus pas sensiblement du niveau de la Méditerranée;

quant à ci à apprécier par différences en un point dont on veut connaître
la hauteur comme on fait-on? — Soient deux stat. accessibl. A B; et
soit un point C inaccessible; imagin. le triangle CAB; et ce triangle
projeté à la surface de la mer. on connaît la longueur AB projetée au
niveau de la mer; c.à.d. ab. on mesure l'angle CAB et CBA réduits à
l'horizon; c'est à dire cab et cba. — alors dans le triangle abc on
calcule le côté ac. — imagin que par A on mène AK comme parallèle au côté
AC. Dans le triangle ACK on connaît AK = ac $\frac{R+h}{R}$.



On connaît aussi CAK = $\frac{\pi}{2} - z$, alors on peut calculer CK.
et comme on connaît la hauteur du point A, on connaîtra celle du point C
on doit corriger z de la réfraction; et comme on ne peut pas se tenir
en C, on se sert d'une table qui donne d avec approximation
on a déterminé ainsi la hauteur des principales montagnes

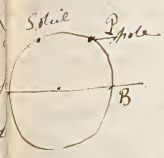
Hauteur des principales montagnes —

dans la chaîne de l'Hymalaya	8818	?
Dawalaghiri —	7830	? —
~~Tabatis~~ — —	7830 —	
amérique —		
au Pérou — Sorata —	7696 —	
Mont Blanc —	4807.	
Mont Rose —	4619.	
en France le mont Pelloux —	4100.	
Le plus haut sommet des Pyrénées est	1703. —	
des Vosges est	1400 —	

on voit que la plus haute montagne n'est à peu près que la $\frac{1}{900}$ partie
rayon terrestre —

Cours d'Astronomie — Lignier

Comment fixe-t-on la port. d'un point de la surface de la terre? — Nous sav. comm. on a déterminé la latitude; c'est la hauteur du pôle au dessus d'un horizon; nous sav. comm. on la détermine. — Les marins déterminent la latitude par la hauteur du soleil au moment de son passage au méridien; on connaît SA; la connaissance du temps donne SP; donc on a ASP; si on prend l'excess. on a PB, qui est la haut. du pôle au dessus de l'horizon.



Longitude; pour obtenir la diff. de long. de deux lieux, on emploie les chronomètres; dès chaque observateur il y a un horloge sidérale réglée sur la révolut. diurne des étoiles; elle marque 24 h. lorsque pend. l'instan de leur passage consécutifs d'un ~~équin~~ même point du ciel au méridien. on règle l'horloge sidéral sur le passage au méridien d'une certaine point du ciel; ce point est l'équinoxe. l'horl. marque 24 h. au moment où l'éq. passe au méridien. dans l'obs. on règle un chron. sur l'horloge sidérale; ~~transport~~ nous dans un 2e obser. situé à l'est du pre. le chron. retrograde d'accord avec l'horloge du 2e observat. suff. que pour aller en A pour aller en B. l'horloge de B avancera sur A; car quand l'équinoxe passe en A, il est déjà passé en B depuis quelque temps. soit $(h'-h)$ la quantité dont B avance sur A, soit l la differ. de longitude; on aura $h'-h : 24 :: l : 360$. donc

$$l = 15^\circ(h'-h);$$ la longit. donc a ainsi 15° pour 1 heure.

au lieu d'un seul chronomètre, on emploie un grand nombre.

autre moyen pour deux lieux pour obtenir l'heure de l'autre — les deux lieux A et B ont régl. deux horloges sur le temps sidéral, on fait que A et B le signal qui est vu en même temps en A et B; les observateurs observent à ce moment les ~~deux~~ heures marquées respectivement par leurs horloges. — on connaît ainsi la différence des heures marquées au même moment; on en déduit la différence de longitude des deux lieux.

BIBLIOTHÈQUE NATIONALE SALLE DE LECTURE

on peut employer comme signaux d'phénomènes astronomiques, par exemple le moment du satellite de Jupiter pénètre dans l'ombre de la planète. — Ce moyen n'est pas bien précis. ~~Car la pen~~ car entre l'ombre et la pénombre il y a des diff. d'observ. Aussi précision le moment où le satellite entre dans l'ombre.

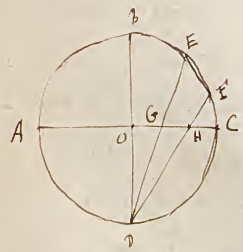
Un moyen plus précis consiste à prendre le moment de l'occultation d'une étoile par la lune; cet observation avec précision; mais en divers lieux diffère; l'occultat. de la même étoile ne se fait pas au même moment — il y a un cercle à faire; mais l'indiquer plus tard.

comme ainsi la latitude et la longitude de diff. points, en forme repr. ces points sur une surface sphérique

on satisfait à cela par les cartes géographiques; la sphère ne peut se développer; — on est obligé de déformer la terre

on a employé diff. mod. de projections — —

project. orthogonale; on imagine un plan tangent en un pt et on projette le point voisin sur ce plan tangent; si la partie de la terre qu'on projette est peu considérable, la déformation ne sera pas considérable autour du point de contact — mais si on projetait un hémisphère, les points situés à 90° du point de contact, seraient tout à fait déformés —



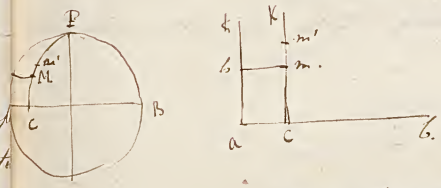
pour la mappemonde à employer la project. stéréographique on prend pour point de vue un point de la surface de la terre — pour un hémisphère qu'on veut projeter, on prend le pôle de l'autre hémisphère, et pour pt. de projection un point pris sur le prolongement du pôle —

tout cercle de la sphère a pour projection un cercle; par BD et pour centre du cercle qlq. fois passer un plan qui sera celui du tableau; soit EF le diamètre du petit cercle; coupe le petit cercle en deux parts symétriques. — DE DF sont deux génératrices opposées du cône dont le sommet est en D. et E

la base. Si du point l'intersect. de ce cone par le plan ABC est un cercle. — en effet $GHD = DEF$; car $DEF = \frac{1}{2}(CD+FC)$
$GHD = \frac{1}{2}(AD+FC)$ — Donc GH est ce que j'appelle une sect. antiparallèle du cone oblique; c'est un cercle —

Cette project. a un autre avantage; c'est qu'une figure infiniment petite a pour projet. une figure infiniment petite semblable; cela tient à ce que deux lignes qui se coupent sur la surface de la sphère suivant un certain angle ~~se coupent~~ ont pour projet. des lignes qui se coupent sous le même angle.

On emploie aussi la project. de Mercator pour les Cartes marines, — Mag. AB est représenté par une droite ab, et chaque merid. par des droites perpendiculaires à ab — Si j'ima. qu'on veuille représenter un point M par exemple — Suppos. que CK représente le merid. CP; si après du point C on portait sur CK une longueur égale à CM on voit quelle partie sect. du globe seront déformées



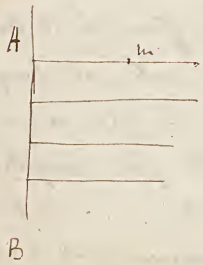
puisque les dimens. suivant le merid. sont conserv., tandis que les dimensions suivant les parallèles sont considérablement grandies. — Alors pour remédier à cela, on augmente les dimens. dans le sens du méridien dans le même sens que dans le sens du parallèle — Soit le point m correspond. de M. soit m' corresp. de M' le point m' est pris de telle sorte que $\frac{m'm}{mh} = \frac{M'M}{MH}$, MH étant l'arc de parallèle compris entre les deux méridiens. ou $m'm = MM' \cdot \frac{mh}{MH}$

Si on pose $z = CM$, $u = Cm$ on a la relation

$du = dz \frac{ac}{MH}$ mais $MH = ac \cos z$ d'où $du = \frac{dz}{\cos z}$.

et $u = \int_0^z \frac{dz}{\cos z}$. z est la latitude du lieu —

Un autre procédé que celui suivi dans la construct. de la Carte de France consiste dans l'emploi du perpend. à la méridienne. Nous savons ce qu'on fait pour déterminer le ~~ligne~~ méridienne; c'est l'une des observations mais dans la direction perpendiculaire, il est clair qu'on trace une ligne géodésique perpend. à la ligne géodésique primitivement tracée. On représente sur la Carte un premier méridien par une droite, et on représente la ~~ligne~~ perpend. à ce méridien par une droite perpend. à la droite précédente; on fixe chaque point par sa distance au méridien. Cette méthode ne peut être employée que pour de petites longitudes, car par des deux cercles perpend. au méridien aux points A et B vont se couper puisque ce sont deux grands cercles; et sur la Carte ils seraient représentés par deux points situés sur deux droites parallèles différentes —



Lignier

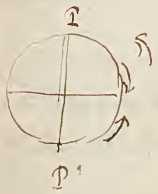
Cours d'astronomie. —

nous avons supposé, en guise la terre fixe, et les autres mobiles. Les déplacements que nous avons observés resteraient les mêmes si on supposait que la terre tournant, tandis que toutes les autres restaient fixes; voyons quelle est celle des deux hypothèses qui est la plus vraisemblable. Les distances des autres à la terre sont considérables et inégales; il est donc peu probable que les autres tournent toutes emportées avec la même vitesse angulaire, tandis que cette apparence s'explique en admettant que la terre tourne autour d'un axe; il est donc plus probable que c'est la terre qui tourne autour d'un axe.

La forme aplatie de la terre s'accorde avec l'hypothèse d'un mouvement de rotation de la terre autour d'un axe; il a un moment elle a été fluide.

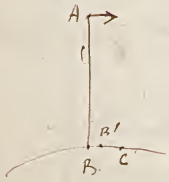
Si la terre était en repos, l'aplatissement résulterait de celui seul de la variation de la pesanteur, qui alors se confondrait avec l'attraction. or en supposant la terre formée de couches elliptiques une même couche étant homog. ce qui est sensiblement vrai, on trouve qu'à l'équateur la pesanteur devrait être moindre que les pes. au pôle de $\frac{1}{590}$; or cette différence est beaucoup plus grande, elle est de $\frac{1}{194}$; ceci s'explique au moyen de la force centrifuge provenant du mouv. de rotat. de la terre; elle diminue l'attract. de $\frac{1}{289}$ à l'éq. au pôle elle n'agit pas; donc la diff. en allant du pôle à l'éq. sera $\frac{1}{590} + \frac{1}{289} = \frac{1}{194}$.

Les vents alisés qu'on observe dans le voisinage des tropiques donnent encore une preuve du mouvement de rotation de la terre. Les parties de l'air voisines de l'équateur sont échauffées, et s'élèvent; elles se dirigent vers les pôles, alors les couches d'air voisines marchent vers l'équateur en rasant la terre. Si la terre était en repos il y aurait dans l'hémisphère austral un vent du sud, et un vent du nord dans l'hémisphère boréal. Mais si la terre tourne, les vents ne doivent plus être du nord et du sud. La rotation se fait de l'ouest à l'orient; les couches d'air participent au mouvement de rotat. de l'ouest à l'orient



C'est ainsi

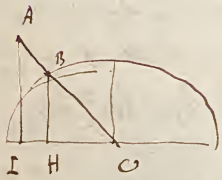
C'est ainsi le mouvement de rotation de la terre qui produit la déviation de la chute des corps pesants ; le direct. du fil à plomb donne la direction de l'attraction ; un corps abandonné à lui même suivra cette direction si la terre ne tournait pas. mais si la terre est en mouv. l'extremité supérieure du fil à plomb décrit un parallèle et le corps qui ~~tombera~~ en tombant paraît ne pas avoir de vitesse initiale parcourt un parallèle d'un jour ; or cette vitesse est plus grande que celle de l'extremité inférieure du fil à plomb. cette différ. de vitesse est insensible si la longueur du fil à plomb est différ. grande. La force agissant sur A est perpend. à la direct. de la vitesse initiale ; elle n'altère en rien cette vitesse, après le temps t le corps sera en C BC étant égale à la distance que A aurait parcouru en vertu de la vitesse initiale, de sorte que $BC = at$. a étant la vitesse de A ; de même B sera venu en B' de sorte que $BB' = a't$, a' étant la vitesse initiale du point dans le point où tombera le corps sera au pied du fil à plomb.



On peut calculer approximativ. la dist. au pied de la verticale

soit $AB = h$; $OB = r$. T = durée de la révolut. terrestre

on a $a' = \frac{2\pi r}{T}$ $\quad a = \frac{2\pi(r + h\cos\lambda)}{T}$



donc $BC - BB' =$ déviation $= (a - a')t = \frac{2\pi h \cos\lambda}{T} t$.

$T = 86164''$; t est donné à peu près par $h = \frac{1}{2} g t^2$, en regardant g comme constant. donc $BC - BB' = \frac{2\pi \cos\lambda \cdot h\sqrt{2h}}{T\sqrt{g}}$. La observation faite dans de mines très profondes est conforme à ce résultat ——

Enfin l'expérience de M. Foucault qui montre la déviat. du plan dans lequel oscille le pendule est une preuve de la rotat. de la terre

Jusqu'à présent nous n'avons parlé qu'd'astres qui conservent la même disposition relative — j'occupe nous d'astres qui ont un mouvement propre —

Loi du mouvement du Soleil.

Mouv. du soleil sur la sphère céleste par rapport aux étoiles considérées comme fixes —

on observe journellement l'ascent. droite et la déclinaison du soleil, ainsi que le diamètre apparent au moment du passage au méridien.

ascension droite — pour une étoile on observe le moment précis du passage de l'étoile au méridien — pour le soleil, on observe le passage des deux bords du soleil — le soleil se meut d'ouest à l'est, et dans la lunette il se meut d'est à ouest ; on note le moment où le bord antérieur se met en contact avec le fil ; puis le moment où l'autre bord est tang. au fil ; la moyenne entre ces deux époques donne le moment où le centre du soleil a passé sur le fil — il y a deux manières d'observer le contact — voici celle ordinairement suivie par les astronomes ; le bord A est d'abord tangent au fil CD ; puis aussitôt de l'autre côté du fil on voit apparaître un point lumineux ; c'est ce moment qu'on observe. puis quand le bord B arrive sur le fil CD et qu'il n'y a plus qu'un point lumineux à gauche de CD, on note le moment précis où le point lumineux disparaît. on est quelquefois tangent intérieurement.

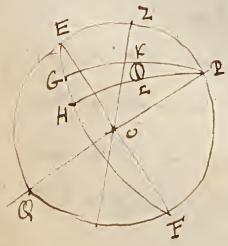
si l'on a pris le plan du méridien et celui pour origine des ascens. droites, on aura ainsi chaque jour l'ascension droite du soleil —

l'ascens. droite du soleil varie d'un jour à l'autre —

Déclinaison du soleil — soit PQ l'axe du monde ; EF l'équat. Z le zénith ; soit S le cent. du soleil ; ES = Δ sa déclinaison. pour connaître cette quantité il suffit de connaître SZ distance zénithale du soleil, et PZ distance zénithale du pole. soit ρ = PZ

Pour connaître la dist. zenith. du soleil, il faut connaître la dist. zenithale du pôle, puis la distance zenithale du centre du soleil. La dist. zénithale du pôle est une chose qu'on a connue pour une même observatoire. Maintenant il faut déterminer la distance zenithale centre du soleil au moment du passage du soleil au méridien, avec le secteur du cercle mural. On observe successivement les deux bords, au moyen du fil horizontal de la lunette; la moyenne de ces deux dist. donne la dist. zenithale du centre. — Les deux observat. ne peuvent pas se faire en même temps; et par conséquent ne peuvent se faire au moment du passage au méridien; mais remarquons qu'au moment du passage du soleil au méridien, la dist. zenithale atteint son minimum, par conséquent varie très peu; alors on observe la dist. zénith. de l'un bord avant le passage au méridien, et on observe la distance zenithale de l'autre bord après le passage du soleil au méridien. De cette manière les quantités observées diffèrent peu du résultat vrai; on aura $\Delta = 90° - (z + \delta)$, en supp. que la déclinaison soit boréale. Si la déclinaison était australe, on aurait $\Delta = z + \delta - 90°$. Lat. pôle l'avant dans notre cas. La déclinaison, le signe indiquera si elle est boréale ou australe.

Les deux genres d'observat. fournissent en même temps une mesure du diamètre apparent; la mesure de la dist. zénithale des deux bords donne le diamètre appar. dans le sens vertical; — si avant la lecture des observat. de l'on centrée droite, c'est en faute. — Si le soleil n'avait pas de mouv. propre ce serait très simple. Il suffirait de noter la différence des époques où passent les méridiens les deux bords du soleil, imagin. le disque du soleil sur la sphère céleste; les deux méridiens tang. aux bords du soleil intercepteraient sur l'équat. un arc GH qui sera égal au diamètre apparent, on aura donc le diamètre apparent. Pour avoir GH il suffit de noter la différence de temps du passage au méridien des deux bords du soleil, et le reduit à raison de 15° pour 1 heure, on aura GH ou l'angle GP. On connaît PK et PL ou les compléments de la déclinaison du soleil et m



Cours d'Astronomie.

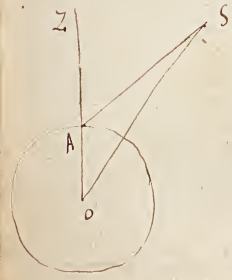
Pagnier

$\cos KL = \cos D = \cos^2(90-\Delta) + \cos^2\Delta \cos\alpha = \sin^2\Delta + \cos^2\Delta \cos\alpha$. ou bien en remarquant que $\cos D = 1 - \sin^2\frac{D}{2}$, $\cos\alpha = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}$, on aura $\sin^2\frac{D}{2} = \cos^2\Delta \sin^2\frac{\alpha}{2}$ ou $\sin\frac{D}{2} = \cos\Delta \sin\frac{\alpha}{2}$; comme α et D sont très petits on peut écrire $D = \alpha \cos\Delta$. Mais le soleil a un mouvement propre qui fait que son mouvement autour de la terre est plus lent que celui de la sphère céleste. on peut connaître la differ. il suffit d'observer l'intervalle de temps écoulé entre 2 passages du soleil au méridien. soit (24^h+E) ce temps; dans un heure le soleil décrira $\frac{360°}{24^h+E}$. connaissant l'intervalle de temps qui sépare les passages de deux bords au méridien, en réduisant cet intervalle en arcs au moyen de $\frac{360°}{24+E}$ pour une heure, on aura GH, d'où on déduira le diamètre apparent.

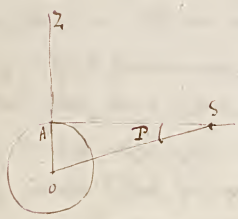
Nos éléments sont continuellement variables. — La course diurne du soleil va chaque jour en augmentant; à la compte d'observat. elle varie chaque jour de quantités inégales. — La déclinaison est continuellement variable; elle est tantôt boréale tantôt australe; le maximum de la déclinaison est 23°, 28'. — Le diamètre apparent est le plus grand en hiver, et le plus petit dans l'été. le maximum est 32', 35", 6 — le minimum est 31', 31". — Dans le diamètre moyen est 32', 3", 3

[Les observat. de distance zénithale doivent être corrigées de la réfraction; cela se fait au moyen des tables de réfraction. la comet. n'est pas la même pour le bord inf. et pour le bord supérieur. — La parallax. n'est pas la même pour les observat. d'ascension droite.]

Examinons maintenant comment les quantités varient; mais avant faisons une correction. — Pour que le diamètre app. du soleil varie il est que sa distance à la terre varie, et alors pour que la distance du soleil à la terre est comparable aux dimensions de la terre, il est évident que on n'obtiendra pas les mêmes résultats, en différents lieux de la terre. et alors il faut ramener les observat. faites en différents lieux à ce qu'elles seraient si les observat. avaient été faites au centre de la terre. —



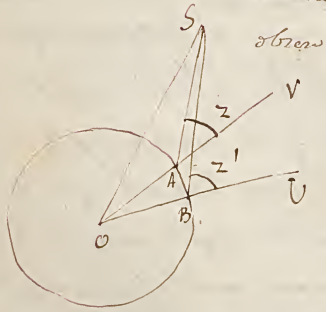
La distance zénithale du soleil au moment du passage au méridien est altérée; soit un observateur placé en A. soit S le soleil; la distance zénithale observée sera $SAZ = z$; au centre de la terre, elle serait $SOZ = z_1$. La differ. $z - z_1 = \rho$ et ce que on appelle la parallaxe du soleil —



il faut donc déterminer la parallaxe; on la déduit de la parallaxe horizontale (c'est à dire de la parallaxe quand l'astre est à l'horizon) de l'observateur. Soit S le soleil à l'horizon; soit P la parallaxe horizontale. Dans le triangle rectangle AOS on a $\sin P = \frac{AB}{OS} = \frac{R}{d}$, R = rayon de la terre qu'on peut supposer sphérique; d = distance du soleil à la terre; on peut écrire simplement $P = \frac{R}{d}$, car P est un angle très petit.

Ayant la parallaxe horizontale, il est facile d'en avoir pour une hauteur quelconque. Dans SAO on a $\sin\rho : \sin z :: R : d$; d'où $\sin\rho = \frac{R}{d}\sin z$, ou bien $\rho = P\sin z$. — ainsi connaissant la parallaxe horizontale, on pourra en déduire la parallaxe du soleil pour une distance zénithale quelconque.

Voyons comment on peut déterminer la parallaxe horizontale en pouvant le faire en observant le même jour les deux distances zénithales du soleil à deux heures situées sur le même méridien, au moment du passage du soleil au méridien. Soient z et z' les distances zénithales observées; pour le point A la parallaxe est $ASO = \rho$; pour le point B elle est $BSO = \rho'$.



Dans AOS on a $z = \rho + AOS$

— BOS — $z' = \rho' + BOS$.

d'où $z' - z = \rho' - \rho + BOA$

mais BOA est la différence des latitudes des points A et B.

Donc $\rho' - \rho = z' - z - \lambda' + \lambda$.

Mais $\rho = P\sin z$ $\rho' = P'\sin z'$.

Donc $P(\sin z' - \sin z) = z' - z - \lambda' + \lambda$.

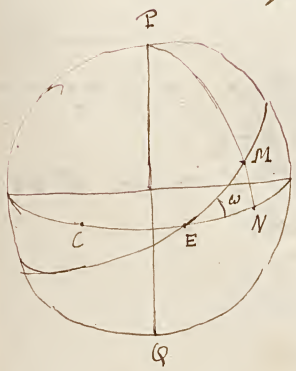
ou $P = \frac{z' - z - (\lambda' - \lambda)}{\sin z' - \sin z}$.

Dans le membre droit est connu, donc P sera connu.

Connaissant ainsi P, à vertu de $P = \frac{R}{d}$, on a conclu la distance du soleil à la terre pour le jour où se fait l'observation.

On a trouvé par des moyens plus précis et que nous indiquerons plus tard, 8'', 6 pour la parallaxe horizontale. — a déduit de là que $\frac{d}{R} = 24000$.

On pourra corriger les distances zénithales de la parallaxe; ayant ainsi les distances zénithales et les ascensions droites pour tous les jours de l'année on pourra construire sur une sphère le lieu de position du soleil; on aura ainsi la projection sur la sphère céleste de position du soleil. — on trouve que celui-ci est un grand cercle de la sphère, d'où on conclut que c'est une courbe plane passant par le centre de la ~~sphère~~ terre. Ceci n'est qu'approché; mais on vérifie aisément par le calcul quel on est ainsi. Figurons le grand cercle que nous supposons parcouru par la projection du soleil — soit



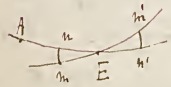
E le point où il coupe l'équateur. Soit $C = CE$ l'ascension droite du point E. Soit M une position du soleil. Soit $CN = A$. ; alors $EN = A - C$. dans le triangle rectangle EMN, $MN = \Delta$, $MEN = \omega$. on a $tg\,\Delta = \sin(A - C)\, tg\,\omega$. ; au moyen de deux observations de déclinaison et d'ascension droite on déterminera C et ω — Cela fait on substituera quelles valeurs de C et ω. ainsi trouvées satisfont à d'autres observations faites dans le courant de l'année, et voit ainsi que C et ω sont constants.; la projection du soleil est donc un grand cercle; Ce grand cercle est l'écliptique; il ne faut pas confondre ce grand cercle avec la trajectoire du soleil, qui est dans le plan de l'Ecliptique. —

Le point où ~~l'équinoxe~~ l'écliptique rencontre

l'équateur sont appelés équinoxes. — Dans l'un le soleil passe en allant de l'hémisphère austral, à l'hémisphère boréal; c'est l'équinoxe du printemps. — l'autre est l'équinoxe de l'automne.

Les points de l'écliptique à 90° des équinoxes sont ceux où la déclinaison du soleil a la plus grande valeur; on les nomme solstices parce que le soleil semble s'y arrêter. ; ω se nomme l'obliquité de l'écliptique — ω = 23°, 28. —

L'astronome comptant les ascens. droites à partir du méridien passant par l'équinoxe du printemps. — nous verrons ce point n'est pas absolument fixe; malgré cela il est avantageux de prendre cette origine. —



Pour déterminer Q et ω on peut faire deux observations au moment du passage du soleil à l'équinoxe; supposons qu'à l'observation avant son passage à l'équinoxe — soit t cette époque;
soit $An = \alpha$, $nm = \delta$
à une autre époque t' la déclinaison est devenue boréale; soit $m'n' = \delta'$ et $An' = \alpha'$ — les déclinaisons, α' = asc. droite
on aura $EN = Q - \alpha$ et $EN' = \alpha' - Q$.
pour avoir la posit. de l'équinoxe regard. le triangle Emn qu'on considère comme semblable, à cause de leur petite dimension; on aura

$$\delta : Q - \alpha :: \delta' : \alpha' - Q \quad \text{d'où}$$

$$Q = \frac{\delta\alpha' + \alpha\delta'}{\delta + \delta'}.$$

pour avoir ω, dans Emn par ex on a $\delta = (Q - \alpha)\, tg\, \omega$

$$\text{d'où } tg\, \omega = \frac{\delta + \delta'}{\alpha' - \alpha}.$$

Si on veut avoir l'époque t_1 du passage du soleil à l'équinoxe, on peut supposer que le mouv. du soleil a été uniforme ~~et~~ ce que ~~cet~~ le chemin parcouru mm' est très petit
on aura $Q - \alpha : \alpha' - Q :: t_1 - t : t' - t_1$.
d'où on déterminera t_1.

Cours d'Astronomie. Lignier

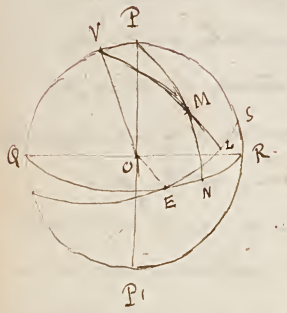
L'obliquité de l'écliptique peut encore s'obtenir par ~~l'inclinaison~~ d'observation du solstice. Vers le 21 juin on observe la déclinaison qui varie très peu. Construisons par exemple la courbe des déclinaisons. deux jours consécutifs n'étant pas égaux, les abscisses ne sont pas égales. tout à fait. la courbe étant construite, menons une tangente longitudinale, l'ordonnée correspond. donne la plus grande déclinaison, et par suite l'époque où elle a lieu; mais cette dernière qualité ne se mesure pas ainsi très exactement, car le point de contact n'est pas régulièrement défini.

on trouve que $\omega = 23^\circ\ 27'\ 57''$ — au 1er janvier 1800. actuell. ω diminue de $48''$ par siècle — plus tard cette dimin se changera en augmentation. —

on compte les ascension droite à partir de l'équinoxe du printemps. —

si on forme un catalogue d'étoiles actuellement, on trouve une très grande différence avec ceux ~~fait~~ faits par les anciens. — il est utile de voir quelle est la loi de la variation; pour cela prenons de nouvelles coord. — la longitude et la latitude. — soit PP' l'axe de la sphère céleste, QR l'équateur, E l'équin. du printemps, S le solstice, de sorte que PSR est perpend. à l'équat. et à l'écliptique; ~~tout~~ ~~fait~~ perpend. à l'écliptique menée par le centre de la sphère est l'axe de l'écliptique. soit OV cet axe; V sera le pôle boréal de l'écliptique.

soit M une autre quelconque — on a $EN = \alpha$ $MN = \delta$. joig. M au pôle de l'écliptique par un arc de grand cercle l'arc EL sera la longitude de l'astre, — l'arc ML sera la latitude. soit $EL = l$, $ML = \lambda$ . . ; la longitude se compte à partir de l'équinoxe; il est facile d'avoir la longitude et la latitude d'un astre en fonct. de l'asc. droite et de la déclinat. et réciproquement. —



Considérons le triangle VPM — VP est connu; on a

$VP = \omega$, $PM = 90 - \delta$

$VPM = VPE + EPN = 90° + \alpha$.

on pourra calculer l'arc VM qui est $90 - \delta$.

$PVM = BVE - MVE = 90° - l$

on est ramené à une quest. de trigon. sphérique. —

Calculer la longitude —

$$\cot(90-\delta)\sin\omega = \cos\omega\cos(90°+\alpha) + \sin(90°+\alpha)\cot(90°$$

d'où $$\operatorname{tg} l = \frac{\operatorname{tang}\delta\sin\omega + \sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Calculer la latitude —

$$\cos VM \text{ ou } \sin\lambda = \cos\omega\sin\delta - \sin\omega\cos\delta.\sin\alpha.$$

en vertu des formules de la trigonométrique —

on aurait de même les formules inverses; on peut dans les formules changer $l, \lambda, \alpha, \delta, \omega$.

en $\alpha, \delta, l, \lambda, -\omega$

et on a

$$\sin\delta = \cos\omega\sin\lambda + \sin\omega\cos\delta\sin l. —$$

Si on rapporte les astres à ces coord., on verra que les latitudes restent sensiblement constantes, tandis que les longitudes augment. d'une dans le même sens, et au maximum de 50'',1 par an — ; on peut concev. cette augm. de longitude au moyen. qu'on s'figure cette terre tout d'une pièce autour de l'axe de l'écliptique, l'équat. restant fixe; ou bien on peut imaginer que l'axe de l'écliptique reste fixe aussi que la sphère céleste, mais que c'est l'équateur qui se déplace,

de telle sorte que le mouvement ~~sur~~ sur l'écliptique restant constant, le point E recule, ~~autour~~ sur l'écliptique, de sorte que l'origine de longitude que recule; c'est cette dernière hypothèse qui est la plus probable; il suffit alors que l'axe de la terre se déplace; l'hypothèse exigerait qu'autour le point de la terre se déplacât d'un mouvement commun; il est moins probable qu'autre que le mouv. de l'axe de la terre. — Mais regard. l'écliptique comme fixe. — l'équat. gard. toujours le mouv. mouvement et tourne de telle façon que E recule; il arrivera que l'axe de la terre fait toujours le même angle avec l'axe de l'écliptique, mais qu'il tourne autour de lui de manière à engendrer un cone de révolution —

Puisque l'angl. augm. de 50",1 par an, pour qu'il augm. de 360°, il faudra un nombre de fois égal au nombre de fois que 360° contient 50",1. ce qui donne environ 25900 —, c'est le temps de la révolut. de l'axe de la terre

L'équinoxe se déplace dans un sens contraire à celui du mouvement propre du soleil; ou le sens contraire à celui du mouvement apparent du soleil; il se déplace dans le sens du mouvement diurne, c'est à dire de l'est à l'ouest; pour les anciens qui regardaient le mouvement diurne comme réel l'équinoxe était avancé; de là le nom de précession des équinoxes; pour les modernes les équinoxes rétrogradent, car ils modern regardent comme mouv. direct, ceux qui se font dans le sens du mouv. propre du soleil —

Les choses ne se passent pas encore tout à fait de cette manière. En calculant la longitude et la latitude ainsi que nous l'avons fait, on aura des résultats qui seront tantôt trop grands, tantôt trop petits

C'est Bradley qui a donné la loi de la inégalité; il a inventé l'
ptème, en supposant que l'axe ne décrit pas exact. un cône
droit; mais qu'il tourne autour d'un axe ~~perp~~ perp, lequel
décrirait le cône droit. — ainsi concev. un cône droit de
23° - 27', 5'7 — imagin une droite qui décrira la surf. de ce
cône d'un mouv. uniforme; imag. une seconde droite passant par
le centre de l'astre éclipté, et décrivant dans son mouvement rotat.
autour de la première droite une petite ellipse. — le grand a
de cette ellipse est dirigé vers le pôle de l'écliptique, et
correspond. sur l'astre a un axe de 18",5. — le petit axe de
l'astre est de 13",76 — le temps employé par l'axe de la terre
a décrire cette ellipse est 18 ans $\frac{2}{3}$. on voit le changement
que cela apporte dans la longitude et la latitude — quand par
ex. l'axe vrai de la terre est à l'extrémité inférieure du grand
axe de l'ellipse, la ~~longitude vraie = la longitude moyenne~~ la latit.
est diminuée de 9",25, et la longitude vraie = la longitude moyenne. si l'axe de
terre est à l'extrémité supérieure du grand axe, la latitude vraie surpasse la latitude m.
de 9",25
quand l'axe de la terre passe par l'un des sommets du petit axe
la latitude vraie est égale à la latitude moyen; la longitude
~~moyenne~~ vraie surpasse la longitude moyenne ou bien est moins
que celle — de $\frac{6",87}{\cos \lambda}$; λ est la latitude de l'astre. pour les points
intermédiaires on calculera aisément la différence qui existent
la latitude et longit. vraies, et la ~~latitude~~ et longitude moyenne —

il faut donc bien distinguer la long. et la latitude vraie
de la longit. et de la latitude moyenne. —

de même la posit. de l'équin. vrai ne résulte pas seulement
du mouv. de rotation; il dépend de la nutation; il est tantôt
le retard, tantôt en avance sur l'équinoxe moyen. — c'est
partir de l'équinoxe moyen que l'on compte la longitude moyenne

Pignier

Cours d'astronomie.

Enfin l'obliquité de l'écliptique ~~est~~ varie entre des limites qui varient de $\omega - 6'',89$ à $\omega + 6'',89$. Il en résulte un équateur vrai et un équat. moyen. C'est à partir de l'équateur moyen qu'on compte les latitudes moyennes. —

Jusqu'à présent nous avons vu le ligne décrite par le soleil sur la sphère céleste; — voyons maintenant comment s'effectue ce mouvement, comment varie sa vitesse, et sa distance à la terre —

L'observat. montre que la vitesse angulaire du soleil n'est pas constante; il ne parcourt pas d'arcs égaux sur l'écliptique en des temps égaux — C'est ce qui est facile de voir en cherchant l'accroiss. de longitude pendant un certain temps; on voit que l'accroiss. de longitude n'est pas proportionnel au temps. — Si on détermine l'accroissement de longitude pendant un jour, cet accroissement de longitude divisé par le temps est la vitesse angulaire moyenne — Alors ce jour, on trouve encore que cette vitesse moyenne est variable d'un jour à l'autre —

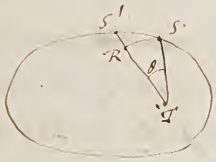
A
3

La variat. du diamètre apparent du soleil indique la variat. de la distance; le diamètre appr. varie en raison inverse de la distance. En effet on a

$$\sin \frac{\Delta}{2} = \frac{R}{D}. \qquad ST = D \qquad R = SH.$$

ou bien $\Delta = \frac{2R}{D}$, d'où le diamètre appr. est en raison inverse de la distance —

Si on fait deux tabl., l'une contenant le diamètre apparent, l'autre la vitesse angulaire moyenne, on trouve que la vitesse angulaire varie comme le carré du diamètre apparent, ~~et~~ et en raison inverse du carré de la distance du soleil à la terre.



celle du Soleil de Kepler; car il résulte de la que l'aire décrite sera proportionnelle au temps. — pendant un temps le Soleil vient de S en S', et l'angle décrit STS', cette produit de sa vitesse angulaire moyenne u par le temps. Mais la vitesse ang. moy. est proport. au carré du diamètre, soit $STS' = \theta$, on a $u = \frac{c}{ST^2}$. Donc

angle $STS' = \frac{c\,\tau}{ST^2}$ ou $c\,\tau = r^2\theta$. mais $r^2\theta$ est 2 fois l'aire de STS'; car cette aire ne diffère qu'd'un inf. petit de l'aire du secteur STR. donc aire $STS' = \frac{c}{2}\tau$. donc elle est proport. au temps. —

Concevons maintenant que la courbe soit sur un plan la direction du Soleil à la terre, en prenant pour distance du Soleil le diamètre apparent. — on prend un point pour centre de la terre et on trace une ligne qui représente la ligne des équinoxes; on mène par le point fixe une droite faisant avec la droite fixe un angle égal à la longitude du Soleil à un jour donné, et à partir du point fixe on prend un dist. proport. à l'inverse du diam. apparent, on trouve ainsi que la courbe décrite est une ellipse, et on sait de plus comment cette courbe est décrite puisque l'on connaît la vitesse du mobile à chaque position, le mouvement du Soleil est déterminé,

Reste à déterminer la dimension réelle de cette ellipse, sa position dans le ciel —

on a $$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(\theta - \varepsilon)}{a(1-e^2)}$$

θ est la longitude du Soleil; ε est la longitude du périgée; a le demi gr. axe de l'ellipse; e l'excentricité. — pour avoir que l'est bien la courbe décrite par le Soleil, il faut déterminer les constantes e et ε; c'est ce qu'on fait au moyen des ~~deux~~ observat. du Soleil; on verra ultérieurement; puisque nous ne nous occupons que d'une courbe semblable à celle décrite par le Soleil.

On aurait ainsi 3 équations entre lesquelles on pourra éliminer a. il restera 2 éq. pour déterminer e et ε. —

Les quantités e et ε peuvent se déterminer séparément. L'excentricité se peut se déduire de l'observation des diamètres apparents maximum et minimum. On a $\frac{1}{r} = K\Delta$; alors $K\Delta = \frac{1+e\cos(\theta-\varepsilon)}{a(1-e^2)}$

Δ est le diamètre apparent du soleil ; pour $\theta = \varepsilon$, le diamètre apparent sera maximum. Soit Δ' le diamètre apparent à cette époque on aura

$$K\Delta' = \frac{1}{a(1+e)}$$

Le diamètre apparent sera le plus petit possible quand $\theta = \varepsilon + \varpi$.

alors $K\Delta'' = \frac{1}{a(1+e)}$; donc $\frac{\Delta'}{\Delta''} = \frac{1+e}{1-e}$ et par suite

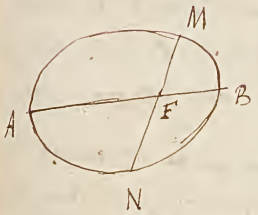
$$e = \frac{\Delta' - \Delta''}{\Delta' + \Delta''}$$

e sera ainsi déterminé ; seulement il est difficile de mesurer avec beaucoup d'exactitude les diamètres apparents ; tandis que la vitesse angulaire du soleil peut se déterminer exactement. et nous avons dit que les diamètres apparents étaient proportionnels aux racines carrées des vitesses angulaires ; si V' et V'' sont les vitesses angulaires correspond. à Δ' et Δ'' on aura $e = \frac{\sqrt{V'} - \sqrt{V''}}{\sqrt{V'} + \sqrt{V''}}$.

On trouve ainsi $e = 0,0168$. c'est à peu près $\frac{1}{60}$.

Cette quantité diminue de 0,00004 par siècle.

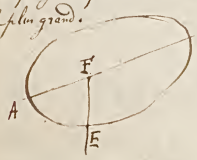
La longit. du perihélie ε peut se déterm. exactement.



Soit l'ellips. décrite par le soleil ; F le foyer ; menons par F un diamètre qlq. MN ; cette droite partagera l'ellipse en deux aires inégales ; or comme les aires parcourues par le rayon vecteur sont proportionnelles aux temps, les aires seront parcourues en des temps inégaux. Mais si on mène le grand axe de l'ellipse AB, l'ellipse sera partagée en deux parties égales, qui seront parcourues en des temps égaux ; il faudra donc chercher deux points A et B dont les longitudes diffèrent de 180°, et qui soient tels que le soleil mette le même temps pour aller de B en A et de A en B. Ces points

sont faciles à trouver. — On a des tables qui donnent chaque jour la longitude du soleil. — Prenons une longitude $g\,l\,g'\,l'$ ou connaît l'époque t_1 où le soleil a cette longitude. En augmentant cette longitude de 180°, et en regardant dans la table on aura l'instant t_2 où le soleil passera dans cette seconde position; on pourra de même avoir l'époque t_3 où le soleil aura la longitude $l + 360°$. — Généralement les $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$ ne seront pas égaux; en tâtonnant on finira par trouver

(X) Une longitude l correspond à une époque t, telle que les intervalles soient égaux; ensuite on distingue le périgée de l'apogée, puisque c'est au périgée que le diamètre apparent est le plus grand.



la longitude périgée = 280°, 19′, 35″ pour le 1er janvier 18..

Cette longitude n'est pas constante; elle augmente pour deux raisons: l'équinoxe du printemps se déplace, le point E reculant de 50″ par an, la longitude du périgée doit aug. de cette quantité; d'ailleurs cette périgée a un mouvement propre; il tourne de 11″, 8 dans le sens ou croissent les longitudes; de la cette augment. de 61″, 9. —

On doit donc distinguer plusieurs sortes d'années. —

L'intervalle nécessaire pour que le cercle horaire du soleil reprenne la même position par rapport aux étoiles est l'année sidérale; sa durée en jours sidéraux est de ~~366j, 242264~~ 365j, 25638. — Cette quantité a pu être déterminée très exactement — on connaît la position que le soleil occupait autrefois par rapport aux étoiles; si donc maintenant on prend le moment où le soleil occupe la même position par rapport aux étoiles, on aura un certain nombre d'années sidérales; on connaît par les chronologies aussi le nombre de jours sidéraux écoulés depuis cette époque; en divisant ce nombre de jours sidéraux par le nombre d'années sidérales écoulées depuis cette époque, on aura la val. de l'année sidérale en jours sidéraux. —

Année tropique. C'est le temps qui s'écoule entre deux passages successifs du soleil à l'équinoxe du printemps; sa durée est 366j, 242264 en jours sidéraux

On peut déterminer la valeur des observations des anciens. Ce sont les observations de Ptolémée nous donnant l'époque du passage du soleil à l'équinoxe du printemps.

Ligniez

Cours d'astronomie

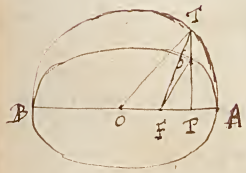
L'année ~~trop~~ sidérale surpasse l'année tropique du temps employé par le soleil a parcourir un arc de 50",1 ; il est facile d'avoir ce temps par une simple proportion

360° - 50",1 : 360 :: 366,242264 : x. —

d'où on déduit x.

année anomalistique ; c'est l'intervalle entre deux passages du soleil au perigée. l'année anomalistique surpasse l'année sidérale et l'année tropique. — elle surpasse l'année sidérale du temps employé pour parcourir l'arc Aa' dont se déplace le perigée. elle surpasse l'année tropique du temps employé pour parcourir l'arc Aa', plus l'arc Ee' dont se déplace l'equinoxe — — elle surpasse donc l'année tropique du temps employé a parcourir un arc de 11",8, plus un arc de 50",1 —

~~Les~~ Les elements du soleil étant determinés, il est facile d'en conclure la position du soleil a un jour determiné. soit AB le gr. axe. F centre de la terre, S une posit. qlq. du soleil ; soit ~~t~~ t l'esp. a laquelle le soleil s'y trouve ce temps étant compté a partir du passage du soleil au perigée. — on demande de determiner la longitude du soleil et sa distance a la terre. soit SFA = V ; E étant la longitude du perigée, celle du soleil sera V + E. ; soit SF = r. nous voulons avoir V et r en fonction du temps.



Decrions sur AB une circonference ; men. l'ord. ASP ; joig. T au centre. soit TOA = u. c'est un variable auxil. —

remarq. que l'aire FAS est proport. au temps. soit T la durée d'une année tropique ; en divisant l'aire de l'ellipse par T, on aura l'aire décrite dans l'unité de temps. — on aura FAS : aire de l'ellips :: t : T

$$\text{aire } FAS = \frac{\pi a^2 t \sqrt{1-e^2}}{T}$$

joign. FT. on aura aire FTA : aire FSA :: a : b ou $a\sqrt{1-e^2}$.

D'où aire $FTA = \frac{\pi a^2 t \sqrt{1-e^2}}{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\pi a^2 t}{T}$

D'ailleurs aire $OFT = \frac{1}{2} OT . OF \sin u$.

D'ailleurs aire $OFT = \frac{1}{2} a^2 e \sin u$.

aire OAT ou $\frac{1}{2} a^2 u = \frac{1}{2} a^2 e \sin u + \frac{\pi a^2 t}{T}$

d'où $u - e \sin u = \frac{2\pi}{T} t$.

eq. entre u et t; l'angle $\frac{2\pi}{T} t$ exprimerait la longit. du soleil si elle croissait uniformément pendant tout le temps de l'année tropique — si à cette quantité on ajoutait la longit. ε du périgée, on aura la longitude moyenne du soleil, tandis que la longitude vraie est $v + \varepsilon$. ∴ la quantité $\frac{2\pi}{T}$ est ce qu'on nomme le mouvement moyen du soleil (longitude); on l'exprime ordinairement $\frac{2\pi}{T}$.

Nous écrirons donc $u - e \sin u = nt$.

On appelle encore nt l'anomalie moyenne —

$nt + \varepsilon$ = longitude moyenne du soleil —

L'angle u est l'anomalie excentrique; enfin l'angle ou STA est l'anomalie vraie

Les anomalies se comptent à partir du périgée; tandis que les longitudes se comptent à partir de l'équinoxe.

Il est facile maintenant d'avoir r et v en fonction de t. Dans l'ellipse on a

$r = a - e . OL$ mais $OL = OT \cos u = a \cos u$

d'où $r = a(1 - e \cos u)$ —

pour avoir v on a $r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos v}$.

d'où $(1 - e \cos u)(1 + e \cos v) = 1 - e^2$.

$\cancel{1} - e \cos u + e \cos v - e^2 \cos u \cos v = \cancel{1} - e^2$

supprimant e comme facteur commun il vient

$$\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}.$$

d'où

$$1 - \cos v = \frac{1 - \cos u}{1 - e\cos u}(1+e).$$

$$1 + \cos v = \frac{1 + \cos u}{1 - e\cos u}(1-e).$$

$$tg^2\frac{v}{2} = \frac{1+e}{1-e}\, tg^2\frac{u}{2} \quad \text{ou} \quad tg\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, tg\frac{1}{2}u.$$

ainsi donc t étant connu, on déterminera u et par suite ~~R~~ et v.

La différence entre l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne, $v - nt$ est appellée <u>équation du centre</u>. en pouvant développer $v - nt$ en série. on aura

$$v - nt = 2e\sin nt + \frac{5}{4}e^2 \sin 2nt + \ldots$$

Cette equat. du centre s'annulle à l'apogée ou au perigée car alors $nt = \cancel{n}\pi$. l'équat. du centre est positive quand le soleil va du perigée à l'apogée. elle est negative quand le soleil va de l'apogée au perigée.

Pour avoir le maximum de l'équat. du centre il faut egaler à zéro sa dérivée par rapport au tempsl. ce qui donne

$$0 = 2ne\cos nt + \frac{5}{2}e^2\cos 2nt + \ldots$$

36v

Lignier

Cours d'astronomie.

Jour vrai. — C'est l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages successifs du soleil au méridien; or ces jours ne sont pas égaux entre eux, il faudrait que la projection du soleil sur l'équateur eut un mouvement uniforme; mais cela n'est pas pour deux raisons; quand même le soleil parcourait l'écliptique d'un mouvement uniforme, sa projection ne parcourrait pas l'équat. d'un mouvement uniforme; ~~Rien~~ au solstice la tangente est parallèle à l'équateur, tandis que aux autres points de l'écliptique la tangente fait un angle variable avec le plan de l'équateur. De plus le soleil ne parcourt pas l'écliptique d'un mouvement uniforme. —

Jour moyen. — Concev. un 1er soleil fictif qui part du périgée en même temps que le soleil vrai, et qui décrit uniformément l'écliptique dans l'espace d'une année tropique. Concev. un 2e soleil fictif, qui retournât à l'équinoxe de printemps en même temps que le soleil fictif; et qui décrivait l'équateur d'un mouv. uniforme dans le même espace d'une ann. tropique. Ce 2e soleil fictif est appelé soleil moyen; et l'intervalle du fin entre deux passag. au méri. du soleil moyen, est appelé jour moyen.

il est facile d'avoir le rapport du jour sidéral au jour moyen. — Soit S la durée du jour ~~moyen~~ sidéral, m la durée du jour moyen; A la durée de l'année tropique exprimée en jour sidéral. pendant une année tropique la longitude du soleil moyen augmente de 2π. — dans l'unité de temps elle augmentera de $\frac{2\pi}{A}$; dans un jour moyen, elle augmentera de $\frac{2\pi . m}{A}$; il faut de là que si au commencement d'un jour

moyen le soleil coïncidant avec une certaine étoile, a la suite d'un jour moyen il aura avec cette étoile une diff. de longitude égale à $\frac{2\pi}{A}$. Mais pour que l'étoile dépasse le soleil de $\frac{2\pi m}{A}$ il a fallu un temps égal à $\frac{mS}{A}$; car l'étoile décrivant 2π dans le temps S, elle décrira $\frac{2\pi m}{A}$ dans un temps égal à $\frac{mS}{A}$. Donc

$$m = S + \frac{mS}{A}.$$

d'où l'on conclut $m = \frac{AS}{A-S}$; donc A étant supposé en jours sidéraux, on aura $m = \frac{366,242264}{365,242264} S$.

ou bien $S = \frac{365,242264}{366,242264} m$.

Si l'on prend m pour unité et égal à 86400", on trouve ~~S = 86400"~~ $S = 86164$. — La différence est 236", ou 3', 56" —. La durée de l'année en jours moyens est donc $\frac{A}{m} = 365,242264$; elle est inférieure d'une unité à l'expression de l'année en jours sidéraux. —

De $m = S + \frac{mS}{A}$ on déduit $\frac{m}{S} = 1 + \frac{m}{A}$. d'où $\frac{A}{m} = \frac{A}{S} - 1$

On appelle midi moyen l'instant du passage au méridien du soleil moyen — c'est le jour moyen qu'on prend pour unité de temps ; le jour moy. étant composé de 24 heures, le jour sidéral = 23h, 56', 4" = 86164" = jour moyen − 3', 56

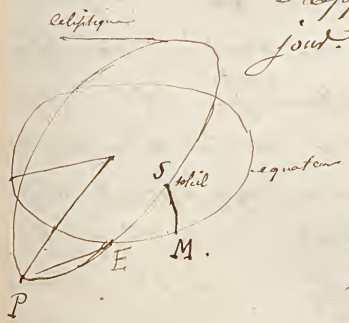
L'année tropique est égale à 365j, 5h, 48', 51", 6. C'est l'année tropique moyenne ; le temps employé par le soleil pour aller d'un équinoxe à l'équinoxe moyen — c'est l'intervalle entre le passage du soleil à l'équin. moyen —

année sidérale ; — plus longue que l'an. tropique puisque l'équinoxe recule de 50",1 — c'est le temps nécessaire à deux ~~fois~~ ~~ans~~ pour que l'année ~~tropique~~ sidérale dépasse l'année tropique ; l'année sidérale en jours moyens est 365j, 6h, 9', 11", 5.

année anomalistique; elle surpasse l'année sidérale d'autant que le soleil peut parcourir l'arc de 11'' — temps que le calcule par la proportion suivante —

Il est facile de conclure de la durée de l'année tropique le mouvement angulaire moyen du soleil que nous avons représenté par $n = \frac{2\pi}{T}$; T étant la durée de l'année tropique. n est dit le mouvement moyen du soleil; on a $n = \frac{360}{365^{j}.242264} = 0^{\circ}, 59', 8'', 3$. Ce mouvement moyen dépend évidemment de l'unité de temps qu'on a adoptée. C'est en moyenne la quantité dont la longitude du soleil augmente d'un jour moyen.

La différence entre le midi vrai et le midi moyen s'appelle équation du temps. — on peut le calculer pour chaque jour. — Soit P le perigée; soit $EP = \alpha$ quantité connue; c'est 360° — l'ascension du perigée. Considérons le soleil à une époque quelconque t compté à partir du mom. du passage du soleil au perigée; menons par S un arc de gr. cercle SM perpend. à l'equateur; EM est l'ascens. droite du soleil pour ce jour là; soit $EM = \varphi$; soit $PS = \theta$. c'est l'anomalie vraie —



or on a $tg\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, tg\frac{u}{2}$ u étant donnée par $u - e\sin u = nt$; t étant connu on pourra donc calculer θ; θ étant connu, si on en retranche EP on aura $ES = \theta - \alpha$; connaissant ES on peut avoir $EM = \varphi$. Car le triangle rectangle EMS donne $tg\,\varphi = tg(\theta-\alpha)\cos\omega$; on peut donc dire que φ est une ~~connue~~ fonction connue de t.

Il est facile de calculer l'ascension droite du soleil moyen. Soit $EM' = \varphi_1$ cette ascension droite — le soleil fictif est parti du perigée en même temps que le soleil vrai; pour décrire α

Cet a dû pour arriver en E, il mettra un temps t' donné par $t' : T :: \alpha : 2\pi$ d'où $t' = \frac{\alpha T}{2\pi} = \frac{\alpha}{n}$ quand ~~il~~ le 1er solstice fait l'équinoxe, le soleil moyen part de l'équinoxe pour décrire l'équateur d'un mouv. uniforme; c'est donc à l'époque $\frac{\alpha T}{2\pi} = \frac{\alpha}{n}$ que le soleil moyen part de l'équinoxe. Donc ~~[illegible]~~ à l'époque t, le soleil moyen aura marché pendant un temps $t - t'$; donc il décrira un arc égal à $n(t-t')$; donc à l'époque t, $\varphi_1 = n(t-$ soit τ l'heure du 1er passage du soleil au méridien après le passage au périgée, pour lui déterminé; pour $t = \tau$ c'est midi vrai, à ce fait $t = \tau + 1$ $t = \tau + 2$, —

L'unité de temps étant le jour, un arc α_1 à l'époque du midi vrai pour chaque jour de l'année. Ces quelles ~~[illegible]~~ conviennent calculer φ et φ_1 pour chaque jour de l'année; la différence sera ~~[illegible]~~ en ~~[illegible]~~, à raison d'un tiers sidérale par 15°, un arc la différ. de temps entre le midi vrai et le midi moyen.

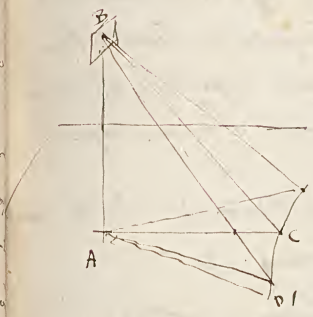
Pour l'époque actuelle on trouve que le temps moyen avance sur le temps vrai du 24 décemb. au 15 avril.
il retarde du 15 avril au 15 juin
il avance du 15 juin au 1er sept.
il retard. du 1er sept. au 24 décembre

L'époque du retard maxim. du temps moyen est le 4 novembre; il retarde de 16', 16'', 2 —
l'époque de l'avance max. du temps moy. est le 11 février; l'avance est de 14', 32'', 14 —

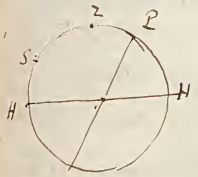
Instruments destinés à indiquer l'heure vraie — gnomon; — c'est une tige verticale* supportant une plaque percée d'un trou; cette plaque jette une ombre sur un plan horizontal, et l'observation se déplace avec le soleil

* il n'est pas nécessaire que la tige soit verticale.

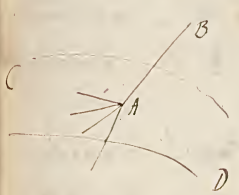
a midi la hauteur du soleil est maximum ; à ce moment le BCA est l'angle de la hauteur du soleil, cet angle étant maximum, AC sera maximum, à midi la distance AC est maximum ; à d. époque également éloignée de midi les D et D' sont les images de l'ouverture, nous avons CAD = CAD'* et AD = AD'. il suit de là que si l'on trace la courbe tracée par le point lumineux sur le pl. horizontal, et que l'on divise en deux parties égales l'angle DAD', par la droite AC, cette droite AC sera dans le plan du méridien. — quand le point lumineux se placera sur AC il sera midi vrai. — Cet instrument peut servir à mesurer la déclinaison du soleil. on a $\frac{AB}{AC} = tg\, BCA$; et BCA est la hauteur du soleil au dessus de l'horizon à midi ; il est facile de déduire de là la déclinaison du soleil — soit h la hauteur du soleil au dessus de l'horizon. on a $SZ = 90° - h$; alors $S\Omega = 180° - (h+\lambda)$ = complément de la déclinaison. donc déclinaison = $= (h+\lambda) - 90° = \lambda$ est la latitude du lieu.



* Dans BDA = BD'A. donc AD = AD'. — le lieu du point lumineux étant tracé du point A on décrit une circonférence avec un rayon arbitraire égal. Cette circ. coupe la courbe en 2 points D et D'. —



L'heure vraie est indiquée par le cadran solaire ; un cadran solaire se compose d'une tige rendue parallèle à l'axe de la sphère céleste — le soleil en jour décrit un parallèle de la sphère céleste, lequel a son centre sur AB prolongée ; imaginons qu'à partir du point le plus haut de parallèle on divise le parallèle en 24 parties égales ; les époques du passage du soleil à ces divis. seront les heures de la journée ; faisons passer des plans par ces division et l'axe de la sphère céleste. ces plans seront entre eux des angles égaux ; de plus quel que soit le parallèle décrit par le soleil, ces plans seront les mêmes. par conséquent ces plans étant déterminés pour un jour de l'année conviendront pour tous les jours de l'année. les traces de ces plans sur la surface seront invariables ; quand l'ombre du stylet se dirigera suivant le plan méridien il sera midi. les autres heures sont indiquées par les époques de passage de l'ombre du stylet sur les différ. traces des plans sur la surface.



année civile — elle ne doit renfermer que leur mont entier de jours; c'est sur l'année tropique qu'il importe de baser l'année civile; car du passage du soleil à l'équinoxe dépendent les époques des saisons; de cette manière le mêm époque de l'année répondra aux mêm saisons —

La l. approxim. admit. à prendre l'année civile qui a 365 j. — (il n'est pas nécess. de jour moy.) —

Chaque année civile est moindre que année tropique de 5h, 48', 51", 6 ou 6h environ; de sorte que au bout de 4 ans la somme des années ~~tropiques~~ civiles étant inférieure à la somme des années tropiques d'un jour a peu près — au bout de 4 fois 365 ans civils c.ad. 1460 ans civils, il y a une différence d'un an. entre la somme des ans tropiq. et la somme des ans civils pendant 1460 ans civils le soleil n'était revenu à l'équinoxe que 1459 fois. il en résultait des inconvénients. Ainsi si a une époque le commence. de l'année est à l'équinoxe du printemps, au bout de 730 — le comm. de l'année se serait trouvé avec le commencement de l'automne; ainsi le comm. de l'année correspondait successiv. aux diff. saisons —

Cela admit que l'année tropique avait pour durée 365 j, 6h. — alors il suffisait au bout de 4 ans civils d'ajouter un jour à l'end. en année; ainsi 3 ans. consécutifs étant de 365 j, la 4e en a 366 —

Ceci n'est pas suffisant encore; l'année exacte est 365, 242 264 et non pas 365, 25; le calendrier fait ~~trop~~ supposer l'année trop longue de 0, 007 36. il faut de temps en temps supprimer quelq. fois des années bissextiles; il supprime 3 ans bissextiles en 400 ans pour rapprocher l'année a peu près; en effet

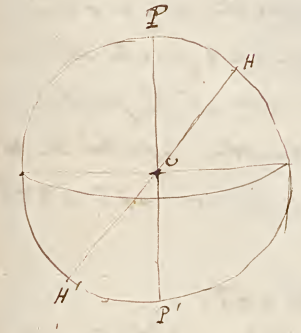
Supprimer 3 jours en 400 ans. Cela revient à supprimer 3 jours par 400, ou $\frac{3}{400}$ de jour par an; or $\frac{3}{400} = 0,0075$. On demande d'ajouter à l'année de 0,0075; ce n'est pas encore suffisant; puisqu'il faudrait la diminuer de 0,007736. La différence est 0,000236. Il faudrait donc diminuer la valeur moyenne de l'année de 0,000236.

~~Il faudrait encore diminuer la valeur moyenne de l'année de 0,000236.~~ — Pour cela il suffit de supprimer une année bissextile ~~tous~~ les quatre mille ans —

Les années bissextiles sont celles dont les numéros sont divisibles par 4 —; tous les 400 ans on supprime ~~une~~ trois années bissextiles; 1° on considère les années bissextiles 1700 1800 1900 2000, on ne conserve que comme bissextile celle dont le numéro divisé par 100 est encore divisible par 4; on ne conserve comme bissextile que l'année 2000 — X.

X. C'est la réforme grégorienne. A cette époque le lendemain du 5 octobre a été appelé le 15 octobre. C'est date de 1582. —

Inégalité de jour et de nuit. Saisons —



Supp. un observateur placé à l'équateur; son horizon est parallèle à l'axe de la sphère céleste (*), le soleil dans un jour décrit un parallèle de la sphère céleste; tout plan passant par PP' divise les deux parties égales; tous les parallèles décrits par le soleil; donc pour un observateur placé à l'équateur le soleil est autant de temps au dessus qu'en dessous de l'horizon. Donc le jour est égal aux nuits. —

(*) en considérant la terre comme réduite à son centre, son horizon contiendra l'axe de la sphère céleste.

Supposons qu'l'observateur s'éloigne de l'équateur, le plan de l'horizon prendra par exemple la position HH'; quand le soleil décrira l'équateur, le grand cercle décrit est divisé par HH' en deux parties égales; donc à ce moment-là et pour l'observateur à quatre le jour sera égal à la nuit. Mais les jours suivants

le soleil décrira des petits cercles de plus en plus éloignés de l'équat. et HH' prolongé ira à petits cercles en portions inégales. Pour un observateur situé dans le pole boreal, quand le soleil part de l'équinoxe du printemps, le soleil étant plus longtemps au dessus de l'horiz. le jour augmente. Le jour augmente donc avec la declinaison du soleil, puis il diminuent; mais le jour sont plus longs que nuits tandique pour un obs. situé dans le pole ~~boreal~~ austral les nuits sont plus longues que jours. Le soleil repasse à l'équin. d'automne; quand il est de l'autre côté de l'equateur, ~~les~~ les jours sont plus courts que les nuits dans le pole boreal et il est la force que HH' se rampe pour tout les parallèles decrits par le soleil. Si l'angle de HH' avec l'equat. est $\angle 23°, 28'$, de que la declinais. du soleil ainsi de passe la valeur de EH, le parallèle décrit par le soleil n'atteindra plus l'horizon il faut pour cela que $90 - \lambda \angle 23, 28'$, λ étant la latitude du lieu considéré. Ceci est polaire; celui qui repond au pole boreal est appelé arctique; l'autre est appelé antarctique.

Pour une latitude donnée on peut avoir la durée d'un jour, c.a.d. le temps que le soleil reste au dessus de l'horizon. Soit PP' la ligne des poles, FG le cercle décrit par le soleil. On a $FP = 90° - \text{declinaison} = 90° - \delta$. Soit S la position du soleil ~~au midi~~ ~~à l'equinoxe~~ t. Compté à partir de midi t est un part. du jour. Soit $SZ = z$; on a $ZPS = 2\pi t$. c'est l'angle horaire. Mais

$$\cos z = \sin\lambda \sin\delta + \cos\lambda \cos\delta \cos 2\pi t.$$

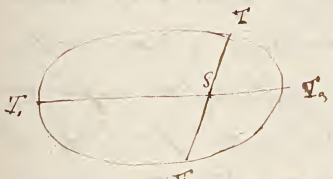
pour chaque heure t du jour on aurait donc la distance zénithale du soleil. Il faut supposer $z = 90°$ pour avoir la durée du demi-jour, on aura $0 = \sin\lambda \cos\lambda + \cos\lambda \cos\delta . \cos 2\pi t$. d'où on déduit t; 2t sera la durée du jour entier; et $1 - 2t$ sera celle de la nuit.

Lignes

Cours d'astronomie. —

Inégalité de jour et de nuit en regardant le soleil comme fixe, et la terre comme mobile. — Le mouv. réel de la terre ~~le fait~~ autour du soleil le fait de cette même sorte que le mouv. appar. du soleil autour de la terre. —

La ligne des équin. est l'int. de l'éq. et de l'ecliptiq. au moment de l'équin. du printemps le soleil est situé sur le prolongement de cette ligne. Soit ST cette intersection quand la terre est en T le plan de l'équateur terrestre coupe l'ecliptique suivant ~~ES~~ ST.



~~Quelle = les~~ rayons lumineux du soleil peuvent être regardés comme parallèles. — pour avoir la séparation d'ombre et de lumière, il faut chercher la ligne de contact de la sphère et du cylindre circonscrit parallèle aux rayons solaires. — il suffit de mener par le centre de la terre un plan ~~parallèle~~ perpendiculaire aux rayons solaires. mener par le centre de la terre un plan perpend. à ST; ce plan sera perpendiculaire à l'équat. terrestre que contient ST, il contiendra la ligne des pôles. à la grand cercle qui sépare l'ombre de la lumière divisera les deux parties égales tous les parallèles décrits par les différents points de la terre, dans ce moment, pour toute la terre les jours seront égaux aux nuits. —

La terre continua à marcher et il arrivera un moment où le rayon vect. mené du soleil à la terre sera perpendiculaire à la ligne des équinoxes. Soit la terre en T_1 et supposons ST_1 perpendiculaire à ST. Le plan de l'équateur terrestre reste parallèle à lui même, à l'intersection de l'équat. terrestre et de l'ecliptique est perpendiculaire à ST_1. Le grand cercle qui sépare l'ombre de la lumière contient cette intersection, et de plus est perpendiculaire au plan de l'ecliptique

il fait donc avec l'axe terrestre un angle egal à l'obliquité de l'ecliptique. c.a.d. = 23°, 28'. — si PP' est la ligne des pôles COP = 23°, 28', le cercle COD se divise par ce dernier point en deux parties egales les parallèles decrits par les differents points de la terre. Pour tous les parallèles dont la distance au pôle est < 23°, 28' l'astre reste couché pas; pour les points compris entre E et C, le jour est > que nuit. — pour les points situés dans l'autre hemisphere ce sera le contraire pour les points situés alleg. le jour est toujours egal à la nuit. — en allant de T à T', le cercle d'illumination a cette de contenir la ligne des pôles, et avec l'axe PP' un angle de plus en plus grand. Cette cause, l'inegalité entre le jour et la nuit pour les diff. jours ont été en augmentant. — la terre allant de T' à T₂, l'angle diminue jusqu'à zero, et des phenomènes inverses se produisent. —

Les durées des saisons ne sont pas égales, ceci se voit dans la figure; les aires correspondantes aux divers saisons ne sont pas égales actuellement le perigée

les aires correspondantes au printemps et à l'été sont plus grandes que celles correspond. à l'automne et à l'hiver. — l'été est plus grand que le printemps; le printemps est > l'automne, l'automne est > l'hiver — mais ceci a lieu pour l'époque actuelle; car ceci depend de la position du perigée par rapport à l'equinoxe du printemps. — et ces deux points ont chacun un mouvement propre. — l'an 6485 les saisons seront egales puis les inégalités changeront de sens. — actuellement on a

été + printemps = aut. + hiver + 8 jours.

cette inegalité de saisons explique pourquoi à latitudes egales, il fait plus froid dans l'hemisphere austral que dans l'hemisphere boreal, actuellement du moins.

Signes. — la course des astres à l'ecliptique est 12 signes qui sont chacun à une de 30 — le premier commence

à l'équinoxe du printemps, c'est le bélier. L'origine de ce nom vient de ce que à l'époque où on le a nommé, les différents signes répondaient aux constellation du même nom. Mais maintenant puisque l'équinoxe se déplace, ~~il faut~~ les signes ne répondent plus aux constellat. du même nom. Quand on parle d'un signe il faut distinguer la constellat. de ce nom, de l'autre ~~du~~ du 30° de l'écliptique et que commence à l'équinoxe du printemps. —

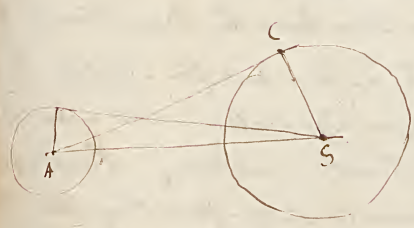
Dimension absolue de la trajectoire du Soleil sur l'écliptique —

Il faut pour cela connaître la parallaxe moyenne du Soleil. — On sait que la parallaxe horizontale $= P = \frac{r}{d}$. D'où $d = \frac{r}{P}$, r rayon de la terre, d dist. du Soleil à la terre —, ~~on trouve ainsi~~ On connaît la parallaxe moyenne elle est égale à 8",6, alors en divisant le ray. moy. de la terre par cette parallaxe on trouve

$d = 24065$ rayon terrestre.

C'est ce que nous avons appelé pied. a, connaissant l on en conclut $al = 404$ rayon terrestres —

Connaissant P et le diamètre apparent du Soleil on peut en conclure dimension de cet astre. — Le diamètre



apparent moyen est 32', 3", 6 —

alors $CAS = 16', 1", 8$. —

Soit R le rayon du Soleil —

$\frac{R}{d} = \text{tg. } CAS = \text{tg. } 16', 1", 8$

mais $\frac{r}{d} = \text{tg. } P = \text{tg. } 8", 6$ — d'où

$\frac{R}{r} = \frac{16', 1", 8}{8", 6} = 112$. on trouve que le volume du Soleil est environ 1400000 fois celui de la terre —

La surface du soleil n'est pas également frottée lumineuse
il y a des parties dont l'éclat est plus grand ou moins grand que
l'éclat moyen. — Les parties obscures s'appellent taches; elles
occupent une bande de 60° de largeur. — Le centre de la tache
est plus obscure que les penombre qui l'entoure; la
forme de la tache varie d'une jour à l'autre.

il y a des parties brillantes appelées facules. —

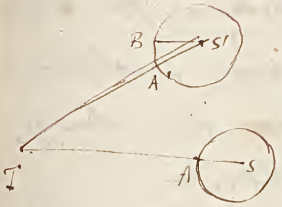
La tache ne restent pas immobiles sur le soleil; indépendamment
des déformations qui leur sont propres, elles ont toutes un mouvement
commun, qui indique que le soleil a un mouvement de
rotation autour d'une axe; cet axe est peu incliné sur
l'ecliptique; le mouv. se fait dans le même sens que celui
du soleil autour de la terre, de sorte que la tache que nous
voyons se meuvent pour nous de gauche à droite; voyons comment
on peut determiner la direction de l'axe de rotation du soleil —

Le mouv. diurne

Si l'axe de rotat. du soleil était perpend. au plan
de l'ecliptique, chaque tache paraîtrait décrire une ligne
parallèle au plan de l'ecliptique; mais il n'en est pas
ainsi. Si l'on determine chaque jour pour une certaine tache
la difference de latitude et de longitude avec la latitude et la longitude
du centre du soleil, on pourra construire la trajectoire de la
tache sur une sphere; ces courbes ne paraissent pas droites; il y a
deux époques dans l'année où elles paraissent droites; c'est quand le plan
de l'equateur solaire passe par le centre de la terre; l'inclinaison
cette droite sur l'ecliptique donne l'angle que fait l'equateur solaire
avec le plan de l'ecliptique cet angle est de 7°, 30'. Les taches
semblent décrire des lignes droites quand la longitude du soleil est
80°, 7' et 260°, 7'. c.a.d. le 11 juin et le 12 decembre

Cours d'astronomie.

Les taches revient prendre la même position sur le soleil au bout de $27^j,3$. mais le soleil a marché pendant ce temps.



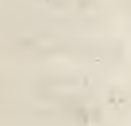
Supposons que le soleil soit en S; considérons une tache A occupant le centre du disque du soleil; cette tache sera vue suivant T S. au bout de $27^j,3$, la tache sera vue suivant T S', en A', S' étant la nouvelle position du soleil — or si par S' nous menons une parallèle SB, à SA, le soleil aura tourné de BS'A' pendant les $27^j,3$; et l'angle BS'A' = S'TS comme alternes internes. — alors au bout de $27^j,3$, le soleil aura tourné de (4 droits + arc BA') or BS'A' est l'accroissement de longitude du soleil pendant $27^j,3$; mais pendant une année la longitude du soleil augmente de 2π; donc en un jour elle augmente de $\frac{2\pi}{365,24}$; donc $27^j,3$, elle augmentera de $\frac{2\pi \times 27,3}{365,24}$; donc $27^j,3$, le soleil aura tourné de $2\pi\left(1+\frac{27,3}{365,24}\right)$; le nombre de jours nécessaire pour que le tourne que de 2π s'obtiendra facilement. cette durée est $25^j,4$

Les taches présentent comme de excavation dont le fond paraît obscur: quand une tache est au centre du soleil, elle est entourée d'une penombre dont la largeur est à peu près uniforme. quand la tache approche du bord du soleil, la penombre diminue du coté du centre du soleil — au centre la tache a l'apparence a; sur le bord, la tache a l'apparence b., c'est précisément ce qui doit arriver si la tache est de excavation dont le fond est obscur —

Herschell expliquait la excavation en supposant le soleil formé d'un noyau obscur entouré d'une sorte atmosphère non lumineuse, et de la atmosphère lumineuse.

Si l'atmosphère s'entrouvrait par une cause quelconque, il y aura une tache noire au centre plus ou moins sombre et une atmosphère plus lumineuse. L'atmosphère intérieure est éclairée par l'atmosphère intérieure qui est lumineuse d'elle même. — Observons que de pareils déchirements ne peuvent pas avoir lieu sans qu'il y ait surabondance de matière plus lumineuse. —

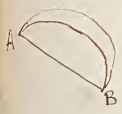
Le fait que prouve que le soleil est entouré d'une atmosphère gazeuse c'est que la lumière reçue du soleil n'est polarisée dans aucune direction ; la lumière émise obliquement par un corps solide incandescent est toujours polarisée ; tandis que celle provenant d'un gaz incandescent ne l'est jamais ; or M. Arago a trouvé que la lumière venant du bord du soleil, ou du centre du soleil n'est jamais polarisée. Donc on doit admettre l'existence d'une atmosphère gazeuse.



Dans les régions tropicales un peu avant le lever ou le coucher du soleil, on aperçoit une lumière ayant une forme lenticulaire ; qu'on appelle lumière zodiacale — L'axe de la lentille est l'axe de rotation du soleil. La longueur angulaire de la lentille varie de 40° à 80°, et la largeur de 8° à 36°. —

Mouvement de la lune —

Chaque jour on détermine l'ascension droite et la déclinaison de la lune ; il est clair qu'il y a quelq. précaut. à prendre parce que on ne voit pas généralement les deux bords —, il faut déterminer d'abord le diamètre apparent de la lune — or la partie visible de la lune contient toujours au moins une demi circonférence, dont laquelle on peut tirer un diamètre AB, c'est la longueur de AB qu'il faut avoir —, pour cela on se sert d'un micromètre à deux fils : on fait en sorte que l'image de AB soit comprise entre les deux fils ; ceci fait, on observe le temps employé par une étoile pour traverser l'espace compris entre les deux fils du micromètre, en réduisant ce temps à raison de 15° par heure on en conclut la distance angulaire des deux bords de la lune —



ayant l'ascen. droite et la déclinais., on en déduit la longitude et la latitude —

La longitude de la lune varie en moyenne de 13° 10 par jour — ; au bout d'un petit nombre de jours la lune aura décrit 360° : c'est à dire qu'elle aura revenue reprendre la même position relative à l'équinoxe

C'est ce qu'on appelle une révolut. tropique de la lune.

La durée est $\frac{360}{13°10'}$ ou 27 321255° =

La latitude de la lune varie aussi ; dans la révolut. tropique elle a latitude en la moitié du temps positive ; et l'autre moitié négative.

Si on construit sur un globe les différentes positions de la lune on trouve que la courbe de ces positions est sensiblement un grand cercle incliné sur l'écliptique de 5°, 8', 48'' —

L'intersect. de ce grand cercle avec l'écliptique est appelée ligne des nœuds —

Le noeud ascendant est celui où la lune traverse l'écliptique quand sa latitude passe du ~~positif au~~ négatif au positif.

La position des noeuds s'obtiendra par l'observation de la lune avant et après le passage de la lune à son noeud absolument comme on l'indique pour le soleil —

l l'

λ λ' on a $\lambda : \lambda' :: l_1 - l : l' - l_1$

d'où on déduira l_1 longitude du noeud —

L'inclinaison de l'orbite lunaire se déduit des mêmes observations

$\gamma = \frac{l}{l_1 - l}$.

La demi longitude des deux noeuds n'est pas une différence égale à 180° — ce qui devrait arriver si la lune décrivait régulièrement un grand cercle. Néanmoins on peut concevoir que l'orbite de la lune est plane, mais que cette orbite se déplace, de telle sorte que la ligne des noeuds se déplace quand les noeuds reculent. En un an le déplacement de la ligne des noeuds est 19°, 19' 43''. Ce mouvement est rétrograde, il se fait en sens contraire du mouvement du soleil, de la lune. Pour une révolution complète des noeuds il faut 18 ans $\frac{1}{2}$. — En même temps l'inclinaison de l'orbite lunaire change; cette inclinaison peut s'écarter de 9' en plus ou en moins de sa valeur moyenne.

Enfin le mouvement de la lune dans son orbite n'est pas régulier. L'accroissement de longitude est variable d'une journée à l'autre et la vitesse angulaire de la lune dans son orbite n'est pas uniforme.

La lune se retrouve pas placée constamment de la même manière par rapport au soleil. De là les phases de la lune

Lignier

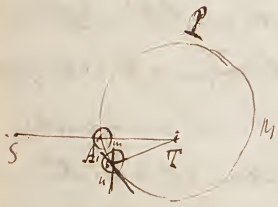
Cours d'astronomie.

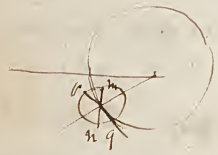
Il importe d'examiner les variations de positions de la lune par rapport au soleil. La longitude de la lune augmente de 13°, 10'35" par jour; celle du soleil augmente de 59'; donc la différence de longitudes est de 12°, 11' pour que la lune reprenne la même position par rapport au soleil, il faut un temps égal à $\frac{360}{12°,11'} = 29^{j}, 12^{h}, 44', 5''$. C'est la durée de la révolution synodique de la lune. La apparences de la lune redeviennent les mêmes après ce temps.

L'orbite de la lune fait toujours apparemment le même angle avec l'écliptique; mais celui qu'elle fait avec l'équateur est variable. Soient OP l'axe de l'écliptique, OL celui de l'orbite lunaire, OQ celui de l'équateur. Dans un petit nombre d'années on peut regarder OP et OQ comme fixes; et OL tourne autour de OP en faisant un angle de 5°, 9'. Considérons les deux positions où OL se trouve dans le plan PQO — dans la 1re posit. POL = 23°, 28" + 5°, 9'. C'est l'angle de l'orbite lunaire et de l'équateur. dans la 2e posit. QOL' = 23°, 28', − (5°, 9').

ainsi — à P ainsi la lune peut donc s'approcher du ☽ ecliptique de 5°, 9' de plus que ne peut le faire le soleil — le ☽; en hiver elle s'approche de l'équateur de 5°, 9' de plus que ne le fait le soleil.

On appelle phases de la lune les divers aspects de la lune; — La lune est en conjonction quand sa longitude est la même que celle du soleil, — elle est en opposit. quand sa longitude est égale à celle du soleil augm. de 180° — elle est en quadrature quand sa longitude surp. celle du soleil de 90° et de 270° —





si l'orbite lunaire se confondait avec le plan de l'écliptique, à chaque conjonction il y aurait éclipse de soleil; à chaque opposition il y aurait éclipse de lune.

au moment de la conjonction on dit qu'il y a nouvelle lune; elle est entre le soleil et la terre; on ne voit donc pas la lune. — le jour suivant la lune se trouve à l'est du soleil soit T la terre. ALM est l'orbite lunaire; à la conjonction, les projections du centre du soleil, de la lune et de la terre se projettent suivant une droite. La partie éclairée de la lune n'est pas visible de la terre.
la lune vient en B; la ligne mn sépare dans la lune la partie éclairée de la partie non éclairée; la partie ~~visible~~ de la lune visible de la terre est la partie pmq; — par conséquent la partie pm qui est éclairée est vue de la terre. —
La lune se trouvant à l'est du soleil le coucher a lieu après lui et le lever a plus tard. —

Quand la lune sera en quadrature, la moitié du disque paraîtra éclairée. — c'est le 1er quartier —

La partie éclairée visible augm. jusqu'à ce que la diff. de longitude soit 180°; alors la partie éclairée de la lune sera entièrement visible pour nous — la diff. de longitude étant 180 la lune se lèvera à peu près quand le soleil se couchera —

la longitude augm. encore, même phénomène se reproduit

quand la lune est nouvelle et quand on n'est qu'en croissant, on voit le reste du disque éclairé d'une faible lumière. Cette lumière vient des rayons solaires réfléchis vers la lune par la terre. Car alors la partie éclairée de la terre est tournée vers la lune.

il existe un rapport remarq. entre le révolution synodique du nœud, et la révolution synodique du nœud de la lune — on trouve —

que 223 revolut. synod. de la lune = 19 revolutions synodique du noeud = 18 ans 10 jours, il s'ensuit qu'au bout de ce temps la lune reprend la même position par rapport au soleil, et par rapport au son noeud. — ; donc les eclipses doivent se reproduire dans le même ordre — en effet ~~parce qu'il~~ ~~qu'il~~ si, a un certain époque la longitude du soleil a été la même que celle de la lune, au bout de 18 a 10 j, il en sera encore de même ; si, a la premier époque la lune se trouvait assez près de son noeud pour qu'il y ait eclipse, au bout de 18 a 10 j, elle aura la même position relativement a son noeud ; et puisqu'a la première époque il y a eu eclipse, il y aura eclipse a la 2e époque precisement au bout de 18 ans, 10 jours.

On peut encore chercher au bout de combien de temps la phase de la lune reprendrait au même jour de l'année ; ~~parce que~~ ~~il faut trouver~~ il arrive que 19 années tropiques renferment 235 lunaisons ou revolut. synodiques. — au bout de 19 années, la phase reprendrait aux mêmes jours de l'année. —

On designe par 1 l'année que suit celle où le 31 decembre était jour de nouvelle lune — l'année précédente s'appelle 2, 3 4 — 19, 1, 2. —

Le nombre est appelé nombre d'or ; celui de 1852 est 10 — l'année 1843 avait pour nombre d'or 1 ; le 31 decembre 1842 était jour de nouvelle lune. —

On appelle epacte d'un année le nombre de jours compris entre le 1er janvier de cette année et la dernière nouvelle lune de l'année précédente ; a chaque nombre d'or répond un epacte determiné ; quand le nombre d'or est 1, l'epacte est 1 ; les epacte se reproduisent au bout de 19 ans.

— Le fête de Pâques est fixée au dimanche qui suit la pleine lune d'après le 20 mars; — par ex. si le 20 mars était jour de pleine lune, il faudrait prendre la pleine lune suivante, et prendre le dimanche suivant; si cette pleine lune tombait un dimanche, il faudrait encore prendre le dimanche suivant. —

Dist. de la lune à la terre; le diamet. app. varie; le max = 33', 30''; le minim = 29', 30'' — ; dès lors dans la révolut. elle va du minimum au maximum, puis du maximum au minimum — . perigée — apogée — ; si la terre a une seule révolut. le perigée et l'apogée sont toujours sur la même ligne passant par le centre de la terre; c'est la ligne des apsides —

On calcule la posit. de la lune pour chaque jour, après quoi on sait que cette courbe est une ellipse dont la terre est un foyer et dont les aires décrites par le rayon vect. menés de la lune à la terre sont proportionnelles au temps.

Il s'ensuit que on peut calculer la posit. de la lune après, à l'aide de formules du mouvement elliptique

$$nt = u - e \sin u, \quad r = a(1 - e \cos u), \quad \lg \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \lg$$

on détermine les éléments de la courbe comme pour le soleil; on a $e = 0,0635$. —

Si on embrasse plusieurs révolutions la ligne des apsides tourne dans le sens du mouvement de la lune, de manière à faire une révolut. complète en 3232^{j},57; elle tourne de 40° par an — : ainsi la lune décrit une ellipse; mais le plan de cette ellipse se déplace continuellement de telle sorte que la ligne des nœuds rétrograde; de plus l'ellipse et elle même mobile et le grand axe de l'ellipse tourne dans le mouv. de la lu

Lignier

Cours d'Astronomie.

Inégalités — L'équat. du centre peut aller jusqu'à 6°. elle dépend de θ que est l'angle de la Ligne entre la lune et le périgée.

Évection découverte par Ptolémée; pour avoir la longitude exacte, il faut ajouter à la longitude calculée par la formule elliptique, une quantité $= 1°,18' \times \sin\{2(☾-☉)-\theta\}$.
$2(☾-☉)$ est le double de la longitude ~~du soleil~~ de la lune moins le double de la longitude du soleil. —

on voit que dans la syzygie, l'évect. diminue l'équat. du centre. — Car la diff. de longitude de la lune et du soleil est 0° ou 180°. alors évection $= -1°,18'.\sin\theta$. ; or si $\theta < 180$ θ-nt est > 0; donc l'évection est de signe contraire à l'équation du centre — ~~contribution~~ aux quadratures. — l'évect. augmente l'équat. du centre aux quadratures —

Variation découverte par Tycho Brahé; elle dépend de la différence de longitude du soleil et de la lune.

$$\text{variation} = 35',32''.\sin 2\{☾-☉\}.$$

elle est nulle aux quadratures et aux syzygies; elle est maximum aux octants. —

Équation annuelle, ~~$-0'$~~ $-1',12.\sin$ (anomalie moyenne du soleil).

Voilà les inégalités de la lune en longitude —

inégalités de la lune en latitude. elles proviennent de la variat. de l'inclinaison de l'orbite lunaire. elle est égale à $-9'\cos(☉-☊)$; $☉-☊$ = distance du soleil au nœud ascendant de la lune; il faut ajouter cette quantité à $5°,9'$. —

Les inégalités de la lune sont périodiques; il y a une autre inégalité appelée inégalité séculaire; elle affecte la longitude de la lune; elle a une période très longue, c'est

l'accélération du mouvement de la lune. — Si le mouvement moyen de la lune était uniforme, son mouvement moyen serait $a + bt$; pour représenter les observations il faut ajouter un terme ct et si on prend pour unité le siècle, on trouve que $c = 10'',2$. Si l'on connaît la position de la lune il y a 25 siècles en lui supposant mouv. qu'elle a actuellement on se trompera de $10'',2 \times 625 = 6375'' = 1°$

(*) or il faut pour parcourir cet arc, 3h 13' en sorte que l'on trouverait qu'un éclipse à cette époque a eu lieu 3h 13' avant l'heure calculée. —

Dimensions absolues de l'orbite lunaire. — Le dist. d'après les dédoublement de leurs parallaxes. — on a trouvé ainsi

max. de la parallaxe longitudinal $= 61', 24''$
mini de la parallaxe longitudinal $= 53', 48''$ } pour paris.

on en conclut les dist. apogée et perigée —

dist. ~~apogée~~ maximum $= 63,4\, r$ —

dist. minimum $= 56\, r$ — r = rayon moyen de la terre

La dist. moy. de la lune à la terre est $59,7\, r$; c'est environ 86000 lieues, on a perçu la moitié du rayon du soleil —

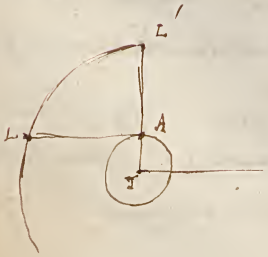
Connaissant le diamètre app. et la parallaxe de la lune, on déduit le rayon de la lune. on a

$$\frac{2r'}{d} = 31', 30 \qquad d = \text{dist. de la lune à la terre}$$

$$\frac{r}{d} = 57', 36''$$

on trouve ainsi que $\frac{r'}{r} = \frac{3}{11}$. —

La lune est assez près de la terre pour que son diamètre apparent varie pendant une journée. — la lune est à peu près à une distance constante du centre de la terre; la lune est plus près de nous au zénith qu'à l'horizon; son diamètre est plus grand au zénith qu'à l'horizon. quand la lune en L est à l'horizon, la distance est AL, — quand la lune est en L' au zénith, la distance est AL'; la diff. des dist. est à peu près égale au ray. AT —



On peut se servir de la distance de la lune à une étoile pour déterminer l'heure de Paris dans un lieu déterminé. —

De la connaissance du temps entre ~~le dist~~ de 9 heures le 9 heures la distance d. étoile à la lune, ~~mais l'heure~~ telle qu'elle seraient vue du centre de la terre, mais l'heure ~~étant~~ l'heure de Paris. — Si on peut déterminer la distance exacte de la lune ~~à~~ une étoile, au moyen de la connaissance du temps on déduira l'heure de Paris. —

— —

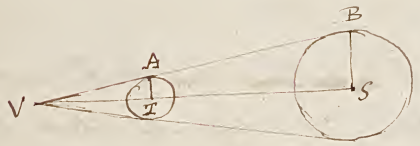
On mesurera la dist. ~~de la lune~~ d'une étoile au bord le plus rapproché de la lune, d'un ~~on~~ déduira la distance de l'étoile au centre de la lune; ~~on~~ détermine la distance zénithale de l'étoile et celle du centre de la lune; — la distance zénithale est altérée par la réfraction. — ~~Aux~~ distances zénithales observées ~~il faut~~ ZE, ZL il faut ajouter des correct. r et r'. les dist. zénithales vraies seront $ZE+r$, $ZL+r'$. — Si les astres étaient vus du centre de la terre, la distance zénithale ~~de la lune~~ de l'étoile ne serait pas altérée; ~~elle de la lune le serait~~ car la parallaxe de l'étoile est nulle; la distance zénithale de la lune serait altérée, la lune serait vue plus haut, c'est à dire qu'il faudrait retrancher de sa distance zénithale $p = Z \sin ZL'$ alors

$$ZL'' = ZL + r' - p \qquad ZE' = ZE + r$$

Soit les dist. zénithales exactes vues du centre de la terre; on connaît l'angle Z; dans le triangle sphérique $ZE'L''$ on a $E'L'' = \cos ZE' \cos ZL'' + \sin ZE' \sin ZL'' \cos Z$ d'où on déduit la distance exacte de l'étoile à la lune et partant l'heure de Paris. —

Eclipses de lune.

La terre projette derrière elle un cône d'ombre, et un point situé dans ce cône est dans l'obscurité, ; si la lune se mouvait dans le plan d'écliptique à chaque révolution la lune se trouverait dans son plan de ce cône, et alors il y aurait éclipse ; mais la lune ne parcourt pas l'écliptique elle passe tantôt au dessus tantôt au dessous du plan de ce cône



de sorte que pour qu'il y ait éclipse, il faut que la latitude de la lune ne soit pas trop considérable, et que la distance de la lune ~~[illegible]~~ à la terre soit plus petite la distance du centre de ~~la lune~~ la terre au sommet du cone.

R = rayon du soleil
r = rayon de la lune.
$D = ST$

on a la proportion $TV : SV :: r : R$.

d'où $TV : SV - TV :: r : R - r$. —

$$TV = \frac{D \cdot r}{R - r}.$$

or $D = 24000\,r$, $R = 112\,r$, d'où $TV = \frac{24000\,r}{112\,r}$

donc $TV = 216\,r$ environ ;

or la distance de la lune à la terre est de $60\,r$.

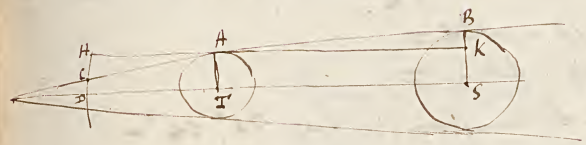
donc si la latitude de la lune n'est pas trop considérable il y a eclipse de lune —

Une eclipse de lune est possible ; voyons si elle peut être totale. — Je suppose que du centre de la terre avec un rayon égal à la dist. de la lune à la terre on décrive une sphère qui coupe le cone d'ombre suivant un cercle CD, appelé le cercle d'ombre. — Si le diamètre du cercle CD est plus grand que le diamètre de la lune, il pourra y avoir eclipse totale

comme le cercle d'ombre et la lune sont à la même distance il suffit de comparer entre eux les diamètres apparents qui sont dans le même rapport que les diamètres réels —

Cours d'astronomie

La generatrice du cone faisant entre elle un angle très petit on peut supposer CD, AI, BS comme perpendiculaires à l'axe du cone. alors deux triangles CHA, AKB donnent



$$CH : AH :: BK : AK$$

soit $\rho = CD$ = rayon du cercle d'ombre; la proportion precedente donne $r - \rho : d :: R - r : D$, d'où

$$r - \rho = \frac{d(R-r)}{D} \quad \text{et} \quad \rho = r - \frac{(R-r)d}{D}$$; alors le demi diametre apparent $\frac{1}{2}\Delta = \frac{\rho}{d} = \frac{r}{d} - \frac{R}{D} + \frac{r}{D}$.

où $\frac{r}{d}$ = parallaxe horizontale de la lune, $\frac{R}{D}$ = demi diametre apparent du soleil; $\frac{r}{D}$ = parallaxe horizontale du soleil.

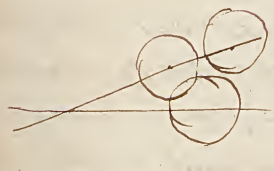
Le maximum de Δ sera $\Delta = 2(61'24'' + 9'') - 31'31'' = 1^\circ 31' 35''$

le minimum de Δ sera $\Delta = 2(53'48'' + 8'') - 32'36'' = 1^\circ 15' 35''$

or le diametre apparent de la lune n'est que de 36' au plus : donc elle peut être contenue entierement dans le cone d'ombre; donc il peut y avoir eclipse totale (*)

(*) et jamais eclipse ~~totale~~ ~~partielle~~ annulaire.

Pour une pleine lune donnée, y aura-t-il eclipse? il faut que la latitude de la lune ne soit pas trop grande; il faut que la distance du centre de la lune au centre du cercle d'ombre ou la latitude de la lune ne surpasse pas sensiblement la demi somme des ~~deux~~ diametres apparents de la lune et du cercle d'ombre. — il n'est pas nécessaire que la latitude soit plus petite que la demi somme des diametres apparents. Elle pourrait etre un peu plus grande, et malgré cela il pourrait y avoir eclipse. — Car si au moment proche de l'opposition le cercle de la lune et le cercle d'ombre ne se coupent pas, il peut très bien faire qu'un peu avant il y ait un eclipse partielle de lune x. Cherchons entre quelles limites la latitude de la lune doit varier pour que à une pleine lune donnée il y ait eclipse.

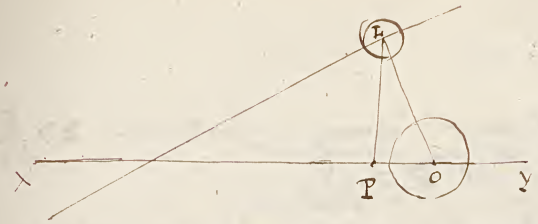


x car la lune se meut presque parallelement à l'ecliptique.

Le maximum de Δ est $1°, 31', 35''$ —
Celui du diamètre app. de la lune est $33', 30''$. —
le maximum de la somme sera $\frac{1}{2}(1°, 31', 35'' + 33', 30'') = 1°, 2$
minim. du diamètre app. du soleil =
minim. du diamètre app. de la lune =
Donc le minimum de la demi somme sera $52', 24''$, —.
ainsi pour qu'il y ait éclipse, la latitude de la lune ne devra pas surpasser un certain angle qui suivant les cas varie de $1°, 2', 32$ à $52' 24''$. — ainsi en supposant une lune donnée, en calculant la valeur de la demi somme précédente on verra si la latitude de la lune ne surpasse pas cette limite.

Calculons maintenant la circonstance de l'éclipse. Dans la connaissance du temps entre nous la latitude et longitude du soleil et de la lune, à des 3 heures ou 3 heures; on peut en déduire l'instant précis de l'opposition. —

Soit t le temps compté à partir de l'heure de la connaissance des temps qui précède l'opposition —. pour $t = 0$, on tirera de la conn. du temps, le diamètre app. de la lune, D; le diamètre nécessaire au diamètre apparent du cercle d'ombre Δ; on aura aussi la longitude du soleil; et en y ajoutant $180°$, on aura la longitude du centre du cercle d'ombre, L; soit l la longitude de la lune; λ la latitude de la lune — celle du soleil est 0. enfin on aura aussi la quantité dont la longitude du soleil s'accroît dans l'unité de temps; soit M ce mouvement du soleil en longitude; soit de même, m le mouvement en longitude ~~de la lune~~; et μ le mouvement de la lune en latitude —. tous ces nombres sont relatifs à l'époque t.



Soit l'ecliptique X Y
à l'époque t le cercle d'ombre
a son centre en O ; le centre de
la lune est en L ; soit $z = LO$
abaissant LP perpend. sur le plan
de l'ecliptique ; on a un
triangle rectangle dont on connait deux cotés : c'est le triangle POL.
en effet OP c'est la longitude du cercle d'ombre, moins la longitude
de la lune ; or à l'époque t la longitude du centre d'ombre est
$L + Mt$; à la même époque la longitude du centre de la lune est $l + mt$.
donc

$$OP = L - l + (M - m)t.$$

on a aussi $\quad LP = \lambda + \mu t. \qquad$ Soit $OL = z$.

~~Donc~~ à l'époque t on aura

$$(1) \qquad z^2 = \left\{L - l + (M-m)t\right\}^2 + (\lambda + \mu t)^2 = at^2 - bt + c$$

en posant

$$a = (M-m)^2 + \mu^2$$
$$-b = (L-l)(M-m) + \lambda\mu$$
$$c = (L-l)^2 + \lambda^2.$$

l'équat. (1) nous donne z pour une valeur donnée de t. cherchons la valeur de t correspondant à une valeur donnée de z ; on aura

$$t = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac + az^2}}{\cancel{2}a}$$

ou $\quad t = \dfrac{b \pm \sqrt{az^2 - h^2}}{a}$

en posant $\quad -h^2 = b^2 - ac$.

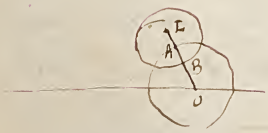
$$h = \lambda(L-l) - \mu(L-l).$$

z a évidemment un minimum; on doit avoir $z > \frac{h}{\sqrt{a}}$
la valeur minimum est $z' = \frac{h}{\sqrt{a}}$.
Si l'on a $\frac{h}{\sqrt{a}} < \frac{1}{2}(\Delta+\delta)$, il y aura éclipse. —
L'époque où l'éclipse devient la plus complète, est celle où z est minimum; cette époque est $t = \frac{b}{2a}$.

On peut avoir l'époque du commencement et de la fin; on a en deux époques on a $z = \frac{\Delta+\delta}{2}$; alors en substituant dans on aura pour t deux valeurs t' et t''. l'une sera l'époque du commencement; l'autre, l'époque de la fin de l'éclipse. —

On peut voir si l'éclipse sera partielle ou totale; il faut pour cela voir si les deux cercles peuvent être intérieurs; il faut voir si $\frac{h}{\sqrt{a}} > \frac{\Delta-\delta}{2}$, éclipse partielle; si $\frac{h}{\sqrt{a}} < \frac{\Delta-\delta}{2}$ il y aura éclipse ~~partielle~~ totale. —

A une époque q.q., on peut demander quelle est la partie de la lune qui est éclipsée; il est la partie du diamètre AB dirigé suivant la ligne des centres et compris dans le cercle d'ombre; il faut connaître AB. or



$$AB = IB - IA = \frac{\delta}{2} - IA$$

$$IA = z - AO = z - \frac{\Delta}{2}, \text{ d'où } AB = \frac{\delta}{2} + \frac{\Delta}{2} - z.$$

Ce qui fait connaître AB. —

Pour un point donné de la terre, l'éclipse sera-t-elle visible? il faut qu'au moment de l'éclipse, la lune soit au dessus de l'horizon du lieu. — or la connaissance du temps indique l'heure du coucher de la lune; ~~il faut~~ pour en avoir pour un lieu donné, au moment de l'éclipse, la lune sera au dessus de l'horizon du lieu —

Signier

Cours d'astronomie.

Le diamètre du cône d'ombre doit être plus considérable grand que le calcul ne le donne réellement. Car la terre est entourée d'une atmosphère qui affaiblit l'intensité des rayons lumineux surtout près de la surface de la terre, de sorte que les choses se passent comme si le rayon de la terre était un peu plus grand qu'il n'est réellement, les astronomes ont trouvé qu'il fallait augmenter Δ de 1'40".

Avant que la lune soit éclipsée, son éclat diminue. C'est en effet ce qui doit arriver; car quand un point ne reçoit plus tous les rayons du soleil il est moins éclairé que quand il recevait tous les rayons; ainsi un point se trouvant dans l'intérieur du cône qui ne reçoit entièrement ni la terre et ni le soleil ne reçoit des rayons que d'une partie du soleil. Ce cône prend le nom de pénombre. — On détermine le moment où la lune entre dans la pénombre, comme on a déterminé le moment où la lune entrait dans le cône d'ombre. — Il y aura un signe à changer; on aura

$\frac{1}{2}\Delta =$ parall. horiz. de la lune + parall. horiz. du soleil − ½ diam. app. du soleil.

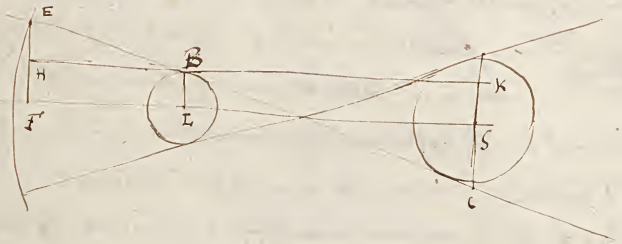
ou aussi $\frac{1}{2}\Delta' =$ + + +

Nous avons vu qu'au bout de 18 ans 10 jours les éclips. de lune se reproduisent dans le même ordre; dans 18 ans il y a 29 éclipses de lune.

On peut se demander quelles circonstances auraient lieu pour un observateur placé à la surface de la lune. Pour lui la terre se trouverait entre la lune et le soleil, il y aurait éclipse de soleil. — Il peut se faire que pour un point de la lune il y ait éclipse partielle de soleil tandis qu'il y ait éclipse de lune; ceci tiendra simplement à ce que la lune passera dans la pénombre. —

Eclipse du soleil.

Il est une exposition que l'eclipse peut arriver. — soit a ce moment S le soleil, L la lune — imagine le cone exterieur circonscrit au soleil et a la lune; la lune etant plus petite que la terre, la terre ne pourra jamais se trouver entierement dans le cone obscur; donc l'eclipse ne sera totale que pour une petit espace de la terre, qui sera situé dans le cone d'ombre pour une tele eclipse partielle pour toute la terre? pour imaginons le cone circonscrit exterieur; c'est de l'interieur de celui que l'on ne voit pas le soleil tout entier. — imagine la section de ce cone par la distance de la terre; soit EF le rayon de cette section; les triangles EBH, BKC donnent



$$EH : d :: R+r' : D-d. \quad \text{d'où}$$

$$EH = \frac{(R+r')d}{D-d}$$

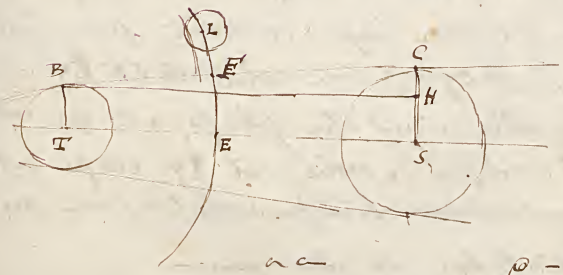
alors $$EF = r' + \frac{d\times(R+r')}{D-d} = r' + \frac{d\times R}{D} \quad \text{approximativement}$$

$$EF = \frac{3}{11}r + \frac{112}{400}r = \frac{55}{100}r. \; ; —$$

ainsi le rayon de cercle de penombre est plus petit que celui de la terre. donc il peut y avoir eclipse partielle de soleil dans tout un hemisphere ou la lune.

pour qu'il y ait eclipse de soleil il faut que la terre atteigne le cone de penombre. —

Face le soleil et la terre et imagin le cone circonscrit exterieur à la terre et au soleil, si la lune ne penetre pas dans ce cone il n'y aura pas eclipse de soleil; — pour que la lune penetre dans ce cone d'ombre, il faut que la latitude de la lune ne soit pas une certaine limite. il s'agit de trouver cette limite; pour cela du centre de la terre décrivons un cercle avec un rayon egal à la distance de la lune à la terre. alors il faut que la latitude de la lune soit moindre que le ½ somme du diametre apparent de la lune et du cercle EE'. Calculons donc l'angle $E'TE$. par B menons un parallele à la ligne des centres. — en posant $EF = \rho_1$



on a $\rho_1 - r : R - r :: d : D$

d'où $\rho_1 = r + \frac{(R-r)d}{D}$

d'où $\frac{1}{2}\Delta_1$ ou $\frac{\rho_1}{d} = \frac{r}{d} + \frac{R}{D} - \frac{r}{D}$

$\frac{r}{d}$ = parall. horizontale de la lune

$\frac{R}{D}$ = dem. diametre app. du soleil

$\frac{r}{D}$ = parall. horizontale du soleil —

alors il faut que la latitude de la lune λ soit plus petite que $\frac{\Delta_1 + \delta}{2}$

max. de $\frac{\Delta_1 + \delta}{2} = 1°, 34', 19''$

min. $= 1°\ 24', 9''$.

on pourrait déterminer les points de la terre pour lesquels il y a eclipse; nous ne ferons pas ce calcul —

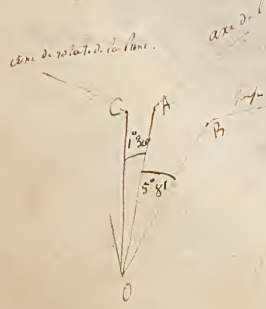
il peut y avoir des eclipses totales, et des eclipses annulaires.

On voit en comparant les valeurs limites de λ dans le cas d'une eclipse de lune et dans le cas d'une eclipse de soleil, que les limites les plus éloignées dans le cas d'une eclipse de soleil; pour la lune cette limite moyenne est 57'; pour le soleil elle est 89'. — Ceci montre que les eclipses de soleil doivent être plus fréquentes que celles de lune. il y a en effet 41 éclipses de soleil et 29 eclipses de lune. mais en un lieu donné de la terre les eclipses de soleil sont moins fréquentes que de lune.

Mouvement de la lune sur elle même; —

La lune offre toujours la même face; on en conclut que la quelle doit tourner sur elle même, et dans un temps precisement égal à celui de sa revolution sidérale. —

on peut dire. l'axe autour duquel se fait la rotation de la lune sur elle même; on a reconnu que le plan de l'eq. lunaire, le plan de l'orbite lunaire, et le pl. de l'ecliptique sont tangentes, que l'intersect. de l'eq. du plan par les deux autres sont parallèles entre elles. — ce qu'on peut s'en rendre : si par un point on mène une perp. à l'ecliptique, un 2e perpend. à l'orbite lunaire, un 3e droite qui est l'axe de la lune, ces trois droites sont tang. dans une même place, et l'axe de l'ecliptique est compris entre les deux autres droites.

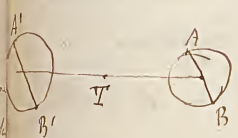


Régnier

Cours d'Astronomie

La partie visible de la lune n'est pas toujours exactement la même : sur les bords du disque il y a des parties qui deviennent tantôt visibles, tantôt invisibles. — C'est la libration qu'il faut s'en rendre compte —

L'axe de la lune n'est pas tout à fait perpendiculaire au plan de l'orbite ~~l'écliptique~~ ; si donc cet axe est à un certain époque dans le plan perpend. à l'orbite de la lune passant par la terre, la partie visible de la lune renfermera une des extr. de l'axe ; et l'autre extrémité ne sera pas visible — ; comme il y a une révolution c'est l'extr. B' qui sera visible, l'extrémité A' sera visible : si donc du point A ~~on~~ comme pôle on décrit un cercle égal à B, B' on aura une petite zone qui sera tantôt visible tantôt invisible — c'est la libration en latitude



il y a la libration en longitude — : suppos l'axe de la lune perpendicul. au plan de son orbite : si la rotat. de la lune autour de son axe était uniforme et si en même temps le mouv. ~~du~~ ang. de la lune autour de la terre était uniforme la lune présenterait toujours la même partie — ; mais le mouv. angulaire de la lune autour de la terre n'est pas uniforme ; c'est ce qui produit la libration en longitude —

au moyen de lunettes on a pu étudier la surface de la lune ; on a vu des sortes de montagnes dont on a pu mesurer la hauteur — ; au centre de ces montagnes se trouvent des espèces de cratères de volcans — il n'y a pas d'atmosphère ; dans la phase de la lune on a observé que la lumière de réfraction d'ombre et de lumière est nette ; ce qui n'aurait pas lieu s'il y avait une atmosphère produisant un crépuscule — ; de plus les rayons lumineux venant du soleil et passant près de la lune ne éprouvent aucun réfract. sensible —

Planet —

De la lunette elle est un diamètre apparent ; elle ressemblant comme les étoiles — . elle est un mouvement propre sur la sphère céleste

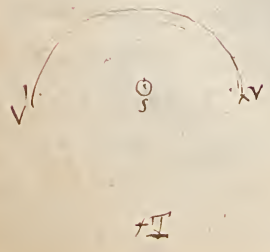
Planet principales de l'ordre, de leur distance au Soleil Mercure, venus, terre, mars, flore, victoria, vesta, iris, Metis hébé parthenope, astrée, junon, Ceres, Pallas, hygie — . Jupiter, Saturne Uranus, neptune. —

on détermine jour par jour l'asc. droite et la déclinaison on en conclut la longitude et la longitude —

on trouve que la planète ne s'écartent pas de l'écliptique la latitude d'une planète est généralement comprise entre + 9° et Cette bande est le zodiaque — La latitude pour chaque planète est tantôt positive tantôt négative — nœud ascendant nœud descendant de la planète. — L'intervalle entre le deux passages d'une planète a ses nœuds ~~est égal~~ égaux

pour le mouvement en longitude, le mouv. des planètes est tantôt direct, tantôt rétrograde. pour un mom. de changement elle paraît stationnaire ; cependant le mouv. direct finit toujours par l'emporter sur le mouv. rétrograde. —

Q/q. cas de planètes présentent des phases comme la lune Ce qui marque qu'elle sont éclairées par le soleil ; elle sont très visibles pour Vénus. — on observe que cette planète est tantôt d'un côté du soleil tantôt de l'autre côté sa distance angulaire au soleil varie — . elle est d'abord en on voit une partie du disque éclairée, la planète se mouvant vient conjonction ; ~~la planète est éclairée~~ la planète est éclairée ; — puis la partie éclairée va en diminuant ; enfin la planète passe entre le soleil et la terre, et alors on ne la voit plus. —



Ceci indique que Vénus tourne autour du soleil —
Il en est de même de Mercure ; ces deux planètes sont dites inférieures. —

Pour les autres planètes leur distance angulaire au soleil peut avoir une valeur quelconque . . — Voici ce qu'on observe. —
La planète se supp. en conjonction ; elle est complètement éclairée ; la planète s'écarte du soleil, la partie éclairée diminue sensiblement ; quand la planète est à 90° du soleil la partie éclairée atteint un minimum qui est > la moitié du disque ; le mouv. continue ; la planète vient en opposition et le disque est complètement éclairé —. La phase ne sait guère sensible que pour Mars qui est très près du soleil ; pour les autres planètes qui sont très éloig. du soleil, la phase est peu sensible —

La variat. de distance des planètes à la terre est cause que l'on voit les phases des planètes ; quand Vénus et Mercure n'ont jamais d'opposition. elle est en conjonct. inférieure et quand elle est entre le soleil et la terre ; et en conjonction supérieure — c'est quand le soleil est entre la planète et la terre. —

Le diamètre app. de Vénus varie de 60″ à 12″
Mercure 12″ à 5″ —
Mars 18″ à 4″.

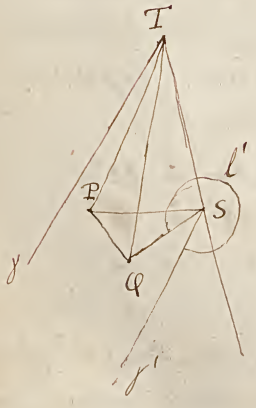
Ce est ainsi à conduit à penser que c'est autour du soleil que les planètes ont un mouvement régulier ; il faut donc rapp. le mouv. de la planète pour un observ. placé au centre du soleil —

Latitude, longitude géocentriques sont celles pour un observat. placé au centre de la terre —

et l'on connaît de suite la latitude et la longitude telles qu'elles seraient du centre du soleil ; on les appelle latitude, longitude géocentriques. — Si par le centre du soleil on mène un grand cercle perpendicul. au plan de l'écliptique et passant par la planète, l'arc compris entre la planète et l'écliptique est la latitude héliocentrique ; l'angle compris entre le pied de cet arc et une parallèle à la ligne des équinoxes menée par le centre du soleil est la longitude héliocentrique. —

Si à cela on joint la distance de la planète au soleil, on aura déterminé la position de la planète. Il s'agit de déterminer ces coord. pour une planète, c.à.d. exprimer rapp. on aura le mouv. de la planète autour du soleil —

Il faut donc déterminer ces coord. héliocentriques. Si on avait la parallaxe horizontale de la planète, on en conclut la distance de la planète à la terre pour chaque observation ; supp. cela connu. — Soit T la terre ; soit Tγ ligne des équinoxes ; le papier est le pl. de l'écliptique — STγ est la longitude ☾ du soleil — Soit P la pos. de la planète ; soit Q le pied de P sur le plan de l'écliptique ; je joins P et Q au centre de la terre T ; QTγ est la longitude géocentrique l ; PTQ = latitude géocentrique de la planète = λ = β. — on connaît PT = r dist. de la planète à la terre — Cela posé il faut déter. l'coord. héliocentr. ; je joins P à S ; SP = r' inconnue — ; je joins S à Q et mène Sγ' parallèle à la ligne des équinoxes ; alors QSγ' = 2π − longitude héliocentrique = 2π − l'.



PSQ = λ' est la latitude héliocentrique ; il faut

Lignier

Cours d'Astronomie.

déterminer r', l' λ' — Dans le triangle QTS on connaît $QTS = L - l$; $TS = R$ Dist. du soleil à la terre. $TQ = r\cos\lambda$ —

On déduit SQ; TSQ = ~~[illegible]~~, connaissant TSQ, on connaît $QSy' = \pi - L - TSQ = 2\pi - l'$ d'où $l' = \pi + L + TSQ$ —

Dans le triangle PQS on ~~a~~ ~~QS~~ connaît SQ, et $PQ = r\sin\lambda$. Ce triangle est rectangle en Q; donc on peut avoir l'angle en S ou la latitude héliocentrique — dans ce même triangle on a $SP = \frac{SQ}{\cos\lambda'} = r'$; on connaîtra donc r' l' λ'. —

Mais on détermine diff. la parallaxe d'une planète. Il y a une époque où l'on peut se passer de la parallaxe; c'est celle où la distance angulaire de la planète au soleil est maximum. (Ceci n's'applique qu'aux planètes inférieures.) — Quand la planète est à sa dist. ang. maximum, c'est que SP est à peu près perpendiculaire à PT; dans ce moment TPS étant rectangle on aura

$$TP \text{ ou } r = ST.\cos PTS = R\cos PTS.$$

Imag. le triangle solide $TPQS$; imag. le triangle sphérique rectangle correspondant; l'angle dièdre TQ est droit.

$$\cos PTS = \cos PTQ \times \cos QTS = \cos\lambda\cos(L-l)$$

donc

$$r = R\cos\lambda\cos(L-l).$$

Donc r est connu et c'est inutile de supposer connue la parallaxe; mais ceci suppose l'observation faite au moment de la plus grande élongation. — Comme la plus grande élongation

se reproduiront assez souvent, et répondent à des point. différents de la planète, on pourra calculer les coord. héliocent. de la planète pour un grand nombre de ses points, ce qui fera connaître d'une manière approchée le mouv. de la planète.

Manière plus expéditive : on doit. cequ les plus le mouvement du mouvement elliptique ; et propos. nous de déterminer les constantes de ce mouvement ; il restera ~~doit~~ vérifier par l'expérience l'exactitude de l'hypothèse faite.

Il y a 7 éléments à déterminer

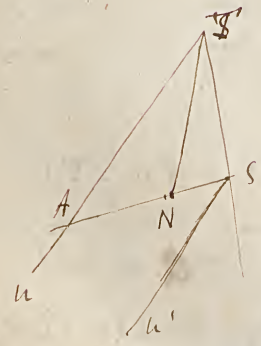
le temps de la révolution T ; le demi grand axe a l'excentricité e, — C époque du passage de ~~soleil~~ la planète au périhélie

ω = angle que le rayon mené du soleil au périhélie fait avec le rayon mené du soleil au

α = angle que le nœud ascendant fait avec la ligne des équinoxes. —

γ = inclinaison de l'orbite sur le plan de l'écliptique

Commençons par la longitude du nœud. — Soit TU la ligne des équinoxes S le soleil — ; N la planète au moment où elle est dans le pl. de l'écliptique, c'est son nœud — Soit SU' parallèle à la ligne des équ. la longitude du nœud est α, et l'angle NSU' = 2π − α. — et dans le triangle TNS on connaît R, ATS et ATN. ———



Dans le triangle TNS on connaît R ; la longitude du soleil ATS = L ; la longitude de la planète ATN = l ; donc par suite NTS = L − l.

Voyons quelle est la valeur de TSN ; or cet angle est égal à (NSU' + L) ~~et~~ égal à ϖ.

ainsi : $\Upsilon SN + NSu' + L = \Upsilon SN + 2\pi - \alpha + L = \varpi$.

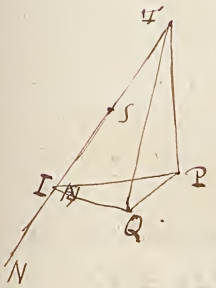
d'où $\Upsilon SN = \alpha - L - \varpi$. or on a $\frac{SN}{S\Upsilon} = \frac{\sin(L-l)}{\sin(\alpha - l - \varpi)}$

ou $\frac{SN}{R} = \frac{\sin(L-l)}{\sin(l-\alpha)}$. on observe un 2e passage de la planète au nœud ; α reste le même, SN aussi on aura $\frac{SN}{R_1} = \frac{\sin(L_1 - l_1)}{\sin(l_1 - \alpha)}$

d'où $\frac{\sin(l_1-\alpha)}{\sin(l-\alpha)} = \frac{R_1}{R}\,\frac{\sin(L_1-l_1)}{\sin(L-l)}$. d'où on déduit α —

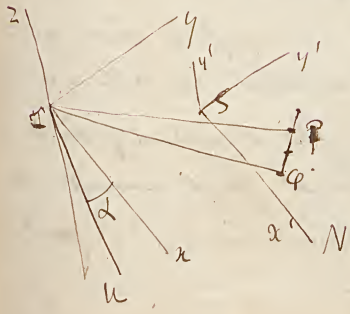
R et R_1 sont connus : ce sont les distances du soleil au lieu. —

Méthode : on choisit le moment où la longitude du soleil est égale à la longitude héliocentrique du nœud ; c'est à dire celui où la terre se trouve sur la ligne SN : à ce moment là planète n'est pas à son nœud — à ce moment la planète est en P hors du plan de l'écliptique ; abaissons PQ perpendiculaire sur le plan de l'écliptique, menons QI perpendiculaire à SN — puis joignons PI ; l'angle PIQ est l'angle d'inclinaison — Considérons le trièdre I, rectangle suivant IQ. — on a la relation $tg\,QIP = tg\,\gamma \sin IIQ$. ou $tg\,\lambda = tg\,\gamma . \sin IIQ$.



d'où $$tg\,\gamma = \frac{tg\,\lambda}{\sin IIQ}.$$

Ces deux éléments déterminés on peut déterminer la loi condorméen héliocentrique — soit Υ la terre ; par Υ je mène une droite parallèle à SN ligne des nœuds ; cette droite Υx sera l'axe des x. je mène Υy perpend. à Υx dans le plan de l'écliptique ; par Υz perpend. au plan de l'écliptique ; par S imaginons 3 axes Sx' Sy' Sz' parallèles à ceux qui passent en Υ. Soit P la planète ; Q sa projection sur le plan de l'écliptique



l'ancienne abscisse est égale à la projection. somme des projections de IS et SP sur IX. donc

$$x = R\cos(L-\alpha) + x'$$

de même

$$y = R\sin(L-\alpha) + y'$$

$$z = z'.$$

si du point P on abaisse PQ perpend. sur le plan de l'écl. si $\rho = TQ$, on aura

$$x = \rho\cos(l-\alpha)$$

$$y = \rho\sin(l-\alpha)$$

$$z = \rho\, tg\,\lambda.$$

d'où

$$x' = \rho\cos(l-\alpha) - R\cos(L-\alpha)$$

$$y' = \rho\sin(l-\alpha) - R\sin(L-\alpha).$$

$$z' = \rho\, tg\,\lambda.$$

on peut déterminer ρ. — menons QI perpendicul. à SN dans le triangle rectangle PQI on aura $PIQ = \gamma$. —

dans PQI on a $z' = y'\, tg\,\gamma$ et γ est déjà connu. on élimine ρ et on aura $x'\ y'\ z'$. —; ces suppos. qu'on ait déterminé α et γ. —

Connaissant les coordonnées héliocentriques r', $\sin\lambda' = \frac{z'}{r'}$ (1) et la longitude héliocentrique *. on vérifiera ainsi que la position de la planète par rapport au soleil, est celle qui répond au mouvement elliptique, en effet l'eq. de la planète donne $r' = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\omega)}$ trois observati. feront connaître a, e, QSI est l'angle $(v-\omega)$; on pourra vérifier si les autres valeurs trouvées conviennent à l'équation. —

(1) $\sin\lambda' = \sin PSQ$. —

* $QSI = \frac{QI}{IS} = \frac{z'}{x' tg\,\gamma}$

Cours d'astronomie — Lymes

De cette suite d'observations on a conclu que les orbites des planètes sont peu inclinées sur le plan de l'écliptique. De plus les planètes parcourent leurs orbites dans le même sens, enfin les durées des révolutions sont liées aux grands axes par la 3e loi de Kepler —

Il y a une loi empirique, loi de Bode, qui sert à se rappeler les distances des planètes au soleil — imaginons une suite de nombres dont les deux premiers sont 0 et 3 et les autres s'obtiennent en doublant toujours à partir de 3 —

0 3 6 12 24 48 96 192 384 —

ajoutons 4 à chaque terme — on aura la suite

4 7 10 16 28 52 100 196 388

Merc. Venus Terre Mars Petites planètes. Jupiter Saturne Uranus Neptune.

3,87, 7,23, 10 15,24 28 52,03 95,39 191,82, 338 —

La 3e ligne exprime le rapport des distances des planètes au soleil —

On peut se rendre compte du mouvement des planètes tel qu'il est vu de la terre. Suppos. que le soleil soit immobile en S., taches les orbites de la terre et de Venus, on a la relation $T'^2 : T'^2 :: a^3 : a'^3$ d'où —

$$T : T' :: a^{\frac{3}{2}} : a'^{\frac{3}{2}}$$

Les vitesses angulaires sont $n = \frac{2\pi}{T}$ $n' = \frac{2\pi}{T'}$.

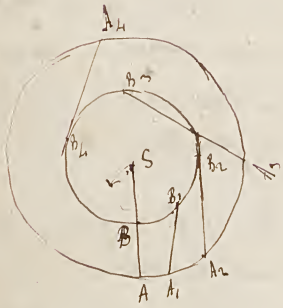
D'où il résulte $n : n' :: a'^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{3}{2}}$.

L'espace absolu parcouru par la terre dans l'unité de temps sera na; pour Venus ce sera $n'a'$; on aura donc $an : a'n' :: aa'^{\frac{3}{2}} : a'a^{\frac{3}{2}}$

ou $an : a'n' :: \sqrt{a'} : \sqrt{a}$.

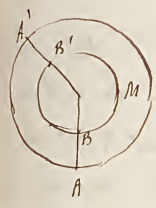
or $a > a'$; donc $a'n' > an$. ainsi la vitesse absolue de Venus est plus grande que la vitesse absolue de la terre — et de même la vitesse absolue d'une planète sera d'autant plus grande qu'elle sera plus rapprochée du soleil.

Supposons la terre et Venus en conjonction en B et au bout d'un temps assez court Venus se trouvera en B_1, terre en A_1 ; or $BB_1 > AA_1$; par suite le rayon AB sera avancé dans le sens de la flèche ; ce mouvement semblera rétrograde — ainsi peu de jours après la conjonction Venus semblera rétrograder ; car cette avance de Venus sera en sens inverse de celle que le soleil semble prendre sur la terre ; il y aura rétrogradation tant que la droite qui joint la terre à Venus fera avec la droite qui la joignait la veille un angle aigu à droite de cette ligne ; et il y aura mouvement direct quand cet angle sera à gauche. — et arrivera un moment où A_2B_2 sera tangente BB_1B_2 — alors pendant quelques jours le mouvement semblera stationnaire, puis il descendra direct jusqu'à ce que A_3B_3 soit encore tangent à BB_1B_2 — alors le mouvement semblera stationnaire — après un temps considérable la somme des mouvements directs l'emportera toujours sur celle des mouvements rétrogrades. —



La révolution synodique d'une planète est le temps que la planète met à reprendre la même position par rapport au soleil et à la terre. —

Cherchons la durée d'une révolut. synodique qui surpasse celle d'une révolution réelle de la planète.



Quand Venus aura fait une révolution la terre sera loin d'en avoir fait une. : la longueur aura A'B' et la terre aura tourné de moins d'une circonférence : la planète aura tourné d'une circonférence et de plus de l'angle BMB' : soit τ la ~~temps~~ durée de la révolution synodique, n et n' les vitesses angulaires de la terre et de Venus ; $n' > n$: il est évident que l'angle décrit par Venus surpasse de 2ϖ celui qu'a décrit la terre dont l'expression est $2n\tau$. on a donc l'équat.

$$n'\tau = 2\pi + n\tau.$$

d'où $$\tau = \frac{2\pi}{n'-n} = \frac{1}{\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}}.$$

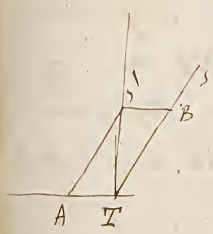
τ pour Venus est de 584 jours

Pour le détail concernant la planète voir le traité d'astronomie.

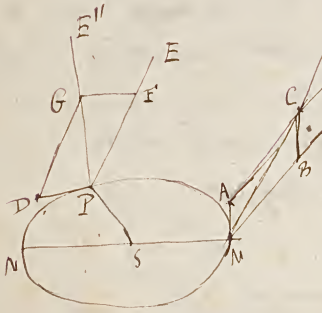
Emploi du passage de Vénus sur le disque du Soleil pour avoir la parallaxe du Soleil —

vitesse de la lumière déterminée par l'observation des satellites de jupiter —

Rotation de la terre démontrée d'après l'aberration de la lumière — Soit ST un rayon de lumière envoyé à la terre en T la terre est animée d'une certaine vitesse d'environ 7000 lieues par seconde que nous représenterons par TA ; soit TB la vitesse de la lumière ; pour l'œil de l'observateur l'effet produit sera le même que si la lumière arrivait à l'œil supposé immobile suivant la diagonale du parallélogramme construit sur les deux vitesses — la lumière semblera arriver suivant ST' ; l'étoile paraîtra déplacée —



Soit NPM le plan de l'écliptique — ; puis NM la trace du plan ~~vertical~~ passant par l'étoile E, la terre M et le soleil S.



Soit donc l'étoile en M ou plutôt en E. ME direction du rayon lumineux ; en faisant sur la vitesse MA et MB le parallélogramme, on aura suivant ME' la ~~vraie~~ position apparente de l'étoile — elle a donc une longitude différant de la longitude vraie d'un petit angle ; quant à la latitude elle n'est pas sensiblement altérée. —

Soit $\varepsilon = CMB$. dans le triangle BMC on a $\sin \varepsilon$ ou $\varepsilon = \frac{BC}{BM} = \frac{u}{V}$; cet angle ε n'est pas ~~l'aberration~~ l'aberration de la longitude. pour avoir l'aberration imaginons une sphère et soit EE' l'arc de petit parallèle correspondant à ~~l'angle en figure~~ l'angle EME' de la figure — cet arc L. coupé sensiblement avec l'arc de grand cercle qui mesure le déplacement réel de l'étoile et qui a pour mesure $\frac{u}{V}$. Or l'aberration en longitude est mesurée par l'angle au centre EKE' ou $\frac{EE'}{EK} = \frac{u}{V \cos \lambda}$, en appelant λ la latitude de l'étoile E. ; donc l'aberration en longitude est $\frac{u}{V \cos \lambda}$ — l'aberration en latitude est nulle et l'aberrat. réelle est $\frac{u}{V}$.

Si nous avons pris le chose se passant de même, ce n'est que l'aberration en longitude a lieu en sens contraire en effet en N le rayon lumineux de l'étoile est parallèle à EM. — la vitesse de la terre est égale à MA mais dirigée en sens contraire — ; donc la diagonale du parallélogramme fait le même angle avec le rayon lumineux mais de l'autre côté l'aberrat. en longitude sera $-\frac{u}{V \cos \lambda}$.

Cours d'Astronomie —

Signier

Qu'arrive-t-il aux époques intermédiaires ? Supposons la terre en P. Soit DPE le plan contenant l'étoile et le parallélogramme ; ce plan est perpend. au plan de l'écliptique donc la longitude n'est pas altérée tandis que la latitude est altérée de l'angle GPF = δ. on aura

$$\sin\delta : \sin\lambda :: u : v \quad \text{d'où} \quad \delta = \frac{u \sin\lambda}{v}$$

telle est l'aberrat. en latitude — Si mon a pris la latitude sera diminuée d'une quantité égale et contraire — a la deux positions l'aberrat. en longitude est nulle — aux époques intermédiaires il y a aberration en longitude et en latitude. Il résulte que l'étoile semble décrire autour de sa position réelle une petite courbe.

Cherchons la dimension de cette courbe. Si on le son perpend. à l'écliptique la dimension de cette courbe est double de l'aberration en latitude. Elle sera donc $\frac{2u \sin\lambda}{v}$. — dans le sens parallèle à l'écliptique la dimension de la courbe sera $\frac{2u}{v}$. Ces lignes sont d'ailleurs des axes ; c'est le diamètre $\frac{2u}{v}$ parallèle à l'écliptique qui est le grand axe. Chaque étoile décrit chaque année autour de sa position réelle une courbe une ellipse dont le grand axe est parallèle à l'écliptique —

Si $\lambda = 90$ cette ellipse deviendra un cercle ; les étoiles situées près des pôles semblent donc décrire des cercles ; au contraire l'ellipse s'applatira de plus en plus à mesure que λ diminuera ; ainsi les étoiles situées près de l'éq. semblent décrire des droites —

Ce qu'il faut remarquer c'est que le petit axe seul varie avec la latitude ; le grand axe est le même pour toutes les étoiles — Calculons son longueur —

59v

ou a $u = \frac{2\pi a}{T}$

60 r

60v

64. r²

61v

N.O.2

63 r

Pro Corona de la Beata

Problema

N 69

63 ~

Liquides
5.

Mécanique

On dit qu'un corps est en mouvement quand il occupe successivement plusieurs points de l'espace. ; nous n'avons pas de moyen de juger du mouvement absolu d'un corps. les mouvements que nous apercevons à la surface de la terre ne sont que des mouvements relatifs. — nous disons de même qu'un corps est en repos quand il conserve la même position relativement à d'autres corps qui nous semblent fixes. — mais ce repos n'est encore qu'un repos relatif. —

L'expérience nous apprend quelorsqu'un corps a été déplacé il a été soumis à l'action d'une cause extérieure. Cette cause a été appelée force. à la vérité ce n'est qu'un mouvement relatif ; mais par induction nous rapportons le fait au mouvement absolu. Un corps ne peut le mouvoir que s'il est sollicité par une force —

L'inertie de la matière consiste en ce qu'un corps ne peut modifier par lui même ni son état de repos, ni son état de mouvement.

Lorsque plusieurs forces agissent simultanement sur un corps, l'expérience nous apprend que les diverses parties du corps se cèdent pas seulement à l'action des forces qui leur sont appliquées. le corps prend un certain mouvement ; il peut arriver que ~~l'état~~ les forces ne modifient ni l'état de repos ni l'état de mouvement du corps, c'est alors que les forces se font équilibre. —

Le mouvement le plus simple est le mouvement uniforme — c'est celui dans lequel les espaces parcourus sont proportionnels aux temps. x étant l'espace parcouru pendant le temps t a l'espace parcouru pendant l'unité de temps, on a $x = at$. a est exprimé en mètres ; l'unité de temps est la seconde ou $\frac{1}{86400}$ d'après moyen. on suppose l'espace compté à partir de l'origine du temps. — La quantité a s'appelle vitesse du mouvement uniforme — Il est supposé le mouvement rectiligne.

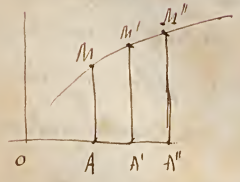
Si le mouvement se faisait sur une ligne courbe, le mouvement serait uniforme si le mobile décrivait des arcs égaux dans des temps égaux; (ce sont les arcs développés de ligne droite qui devraient être égaux).

Dans la pratique il est rare que l'action des mouvements uniformes; alors on considère le mouvement uniforme qui ferait parcourir le même espace dans le même temps.

On appelle mouvement ~~uniforme~~ varié tout mouvement qui n'est pas ~~varié~~ uniforme; dans ce cas il y a nécessairement une force agissant sur le mobile d'une manière permanente ou par intermittence — on appelle vitesse du mobile en un moment quelconque, la vitesse du mouvement uniforme que prendrait le corps, si la force cessait tout à coup son action —; nous supposons en cas le mouv. rect. ligne; nous parlerons du mouv. curviligne quand nous aurons vu la composition des vitesses.—

Quand la force cesse son action on est conduit à admettre que si le corps ne rencontrait pas d'obstacle, il se mouvrait indéfiniment d'un mouvement uniforme.

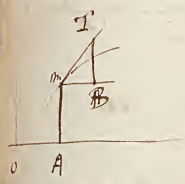
La loi d'un mouvement varié sera représentée par $e = f(t)$; cette relat. étant connue le mouvement est déterminé —; le plus souvent on n'a pas cette relation; mais on connaît un certain nombre de valeurs de e pour des valeurs correspondantes de temps —; on pourra construire la comb. des espaces en prenant t pour abscisse et e pour ordonnée; en joignant les points obtenus par des traits continus on aura la courbe des espaces.; cette construction permettra de faire des interpolations; ainsi entre A et A', on aura l'espace correspondant à un temps compris entre OA et OA' —; il ne faut accorder de confiance qu'aux valeurs dont comprises dans les limites de l'expérience



dans le mouvement varié la vitesse est egale a $f'(t)$. —
C'est la demonstration ordinaire. (Thom).

on a $\lim. \frac{\Delta e}{\Delta t} = v$.

or $\lim \frac{\Delta e}{\Delta t}$ est la limite du rapport de l'accroiss. de la fonction a l'accroissement de la variable. donc $v = f'(t)$. — Cette demonstration suppose que la vitesse est une fonction continue du temps. l'experience prouve qu'il en est ainsi; il n'y a pas de force dans la nature qui produise un changement brusque de vitesse dans un temps infiniment petit.



Ceci etabli la courbe des espaces peut donner la vitesse a un moment qlq. ; supp. qu'a l'epoque t le mobile soit en m; menons la tangente en m; menons mB parallele a l'axe des x; prenons mB egale a l'unité de temps (a l'echelle convenue); par le point B elev. BT perpendicul. à mB; BT representera la vitesse du mobile en m. Car $BT = mB \cdot tg\, BmT = f'(t)$.
BT represente la vitesse du mobile en mètres. —

Le cas le plus simple du mouvement varié est le mouvement uniformement varié, — c'est celui ou la vitesse varie proportionnellement au temps; — dans ce cas la vitesse est representée par $v = a + gt$ —
La quantité g est ce qu'on appelle l'acceleration; c'est l'accroissement de vitesse dans l'unité de temps.

La chute des corps pesants est un exemple de ce mouvement et dans ce cas $g = g, 8088^{m}$.

Ici on connait la loi de la vitesse; on peut remonter a la loi des espaces; v est la derivée de e; on aura $e = b + at + \frac{gt^2}{2}$.

La reciproque est vraie; si l'espace est une fonction rationnelle et du 2e degré et de t, le mouv. sera unif. varié, si on compte l'espace e a partir de $t = 0$ on a

$$e = at + \frac{gt^2}{2}.$$

Le mouvement uniformément varié peut se remplacer par un mouvement uniforme, on peut écrire

$$e = t\left(a + \frac{gt}{2}\right) = t\left(a + \frac{v-a}{2}\right).$$

ou $$e = t\left(\frac{a+v}{2}\right)$$

si donc on considère des époques auxquelles la vitesse soit $\underline{a}$ et $\underline{v}$ l'espace parcouru pendant l'intervalle de ces deux époques sera le même que si le mobile avait eu un mouv. uniforme dont la vitesse serait etc $\left(\frac{a+v}{2}\right)$.

si on suppose nulle la constante a, on a alors

$$v = gt \qquad e = \frac{gt^2}{2}$$

la vitesse est proportionnelle au temps; l'espace parcouru est proportionnel aux carrés du temps : si on élimine le temps entre les deux equat. on a $v = \sqrt{2gh}$. — Cette formule fait connaître v quand on connaît la hauteur de chute — — si on fait cette expérience dans l'air pour vérifier cette formule il faut que la hauteur de chute ne dépasse pas 4 ou 5 mètres; car au delà la resistance de l'air devient trop considérable —

au bout de un temps t l'espace parcouru est $e = \frac{gt^2}{2}$

au bout de un temps $(t+1)$ on a $e' = \frac{g}{2}(t+1)^2$.

donc on conclut $e' - e = \frac{g}{2}(2t+1)$;

donc l'espace parcouru pendant les unités de temps successives croissent comme les nombres impairs —

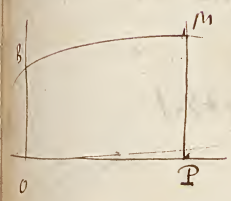
si deux corps tombent suivant la même verticale et en partant du même point mais à un intervalle de temps très court, on est à remarquer qu'il est aussi les deux corps vont en croissant assez rapidement. — supposons que le point B parte $\frac{1}{100}$ de seconde après le point A; voyons ce que sera l'écart AB' au bout d'une seconde compté à partir de la chute du point B. au bout de 1" on aura $AB' = \frac{g}{2}\left\{(1,01)^2 - 1\right\} = 0,0098$ il est aussi un décimètre; et en continuant les intervalles vont en croissant —

Mécanique

on a construit des tables qui donnent la vitesse de chute pour des hauteurs correspondantes — voici quelques nombres

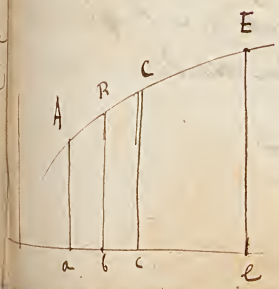
vitesse de chute	haut. de chute
$0^m,1$	$0^m,0005$
1^m —	$0,05$
2^m	$0,2$
4^m —	$0,8$
$6^m,27$	2^m,
$7^m,60$ —	3^m
$8^m,8$	4^m —

Précédemment nous avons cherché l'espace des vitesses; si on avait la courbe des vitesses, on pourrait remonter aux espaces parcourus. — pour $t=0$ on a $v=OB$; alors pour $t=OP$ on a $v=PM$, — on a de même construit les points intermédiaires. on sait que l'aire MBOP a pour dérivée l'ordonnée MP; mais l'espace a aussi pour dérivée MP, puisque MP représente la vitesse; de l'aire et l'espace parcouru ont même dérivée; ils ne peuvent donc différer que par une constante; ici la constante est nulle. —



On voit que quand la courbe des vitesses sera simple, on aura aisément la loi des espaces parcourus. —

formule qui donne l'aire d'une courbe — Considérons une partie de courbe dans laquelle on pourra supposer que l'ordonnée est constamment croissante ou décroissante. Supp. la croissante ou veut mesurer l'aire AEae. on partage l'intervalle ae en un certain nombre de parties égales. Soit h la longueur de l'une de ces parties, on aura les parties ABab comme des trapèzes donc une approximat. pour la mesure de l'aire



$$h\left\{\frac{y_1}{2}+y_2+y_3+\ldots+\frac{y_n}{2}\right\}.$$

Thoma simpson a donné une formule plus approchée que celle là. Supposons que le nombre des divisions soit pair et égales entre elles, de sorte que les ordonn. y_1 y_n — soient en nombre impair.

Considérons trois ordonnées Aa, Bb, Cc. — Soit encore $h = ab = bc = \ldots$ si on fait la somme des deux trapèzes on aura pour l'aire

$$\frac{h}{2}\{y_1+2y_2+y_3\}.$$

Le but de la formule de Thoma simpson est d'avoir une formule plus approchée, sans augmenter le nombre des divisions. Supposons que la droite ac en trois parties égales ; soit m et p les points de division ; on aura $am = mp = pc = \frac{2}{3}h$. Et menons mM, pP perpendiculaires à l'axe des x ; menons les cordes AM, MP, PC. ; soit o le point où MP rencontre Bb. Soit BO = δ on aura pour l'aire des trapèzes Am, Mp, Pc

$$\frac{h}{3}(y_1+Mm)+\frac{h}{3}(Mm+Pp)+\frac{h}{3}(Pp+y_3).$$

ou $$\frac{h}{3}\{y_1+2(Mm+Pp)+y_3\}$$

or $$mM+Pp = 2OB = 2(y_2-\delta);$$

on aura donc pour l'aire

$$\frac{h}{3}\left\{y_1+4\left(\frac{y_2}{2}-\delta\right)+y_3\right\}.$$

dans la formule de Simpson on néglige δ, et on prend pour l'aire $\frac{h}{3}\{y_1+4y_2+y_3\}$.

La suppression de δ augmente l'expression précédente et comme on avait l'aire par défaut, on conclut que l'on approche davantage de l'aire réelle — pour l'aire totale on aura

$$\frac{h}{3}\{y_1+4y_2+y_3\}+\frac{h}{3}(y_3+4y_4+y_5)+\ldots$$

ou $\frac{h}{3}\left\{y_1+y_{2n+1}+4(y_2+y_4+\dots+y_{2n})+2(y_3+y_5+\dots y_{2n-1})\right\}$

en supprimant δ on a augmenté la somme des trapèzes de $\frac{4}{3}h\delta$. ; or si on considère le triangle MBO ~~PPBO~~, en le considérant comme ayant pour base commune BO, on aura

$$MBO+PBO=\frac{\delta}{2}\times\frac{2}{3}h=\frac{\delta h}{3};$$

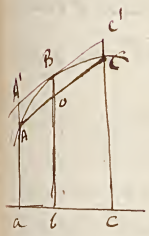
donc la somme des trois trapèzes a été augmentée de 4 fois le triangle MBP. ; pour avoir l'aire exacte il avait fallu ajouter seg^t AM + seg^t MP + seg^t PB.

au lieu d'ajouter les trois segments, on a ajouté 4 fois un triangle qui est un peu plus petit.

il peut arriver que l'approximation soit par excès. —

La formule de Simpson revient à substituer à la courbe une suite d'arc de parabole correspondant à trois points consécutifs. — prenons trois points consécutifs A, B, C : par ces trois points on peut faire passer un arc de parabole dont le diamètre soit parallèle aux ordonnées. — l'aire comprise entre l'arc de parabole et les ordonnées extrêmes est égale ~~alors~~

seg^t ABC + ACca. —



seg^t $ABC=\frac{2}{3}AA'CC'=\frac{4}{3}BO\times h$

$ACca=h(y_1+y_3)$.

donc l'aire totale $=h(y_1+y_3)+\frac{4}{3}BO\times h$.

or $BO=y_2-\frac{y_1+y_3}{2}$ donc

aire de deux trapèzes $=\frac{h}{3}(y_1+4y_2+y_3)$

c'est bien la même expression que précédemment —

inertie — L'inertie est cette propriété la vertu de ne
un point ne peut modifier ni son état de repos ni son
état de mouvement. —

L'effet d'une force sur un point material est
indépendante du ~~point~~ mouvement antérieurement acqu
Ceci résulte du principe de l'indépendance des
mouvements simultanés.

Si l'on considère un système de points décrivant des
droites égales et parallèles avec des vitesses constantes ou
variables, mais qui sont la même pour tous à chaque instant
de sorte que les points ne paraissent pas se déplacer les uns par rapport
aux autres, si un de points M est sollicité par une force F, qui
lui ferait parcourir l'espace dans le temps dt n'agissant
pas sur les autres, le mouvement relatif du point M
à l'égard des autres points sera le même que le mouvement
absolu qu'aurait ce point M, si le mouvement commun
n'existait pas, et que le point M partant du repos
fut (même) sollicité par la même force —

Ce principe ne peut pas être vérifié par l'expérience
et est généralisé par l'induction, et les nombreuses conséquences qu'on en déduit sont toujours vérifiées par
l'expérience —

Cours de Mécanique

Consequence du principe de l'indépendance des mouvements simultanés. —

1° Si un point matériel animé d'une vitesse acquise g venait à être sollicité par une force dirigée dans le sens même du mouvement, cette force lui communiquerait après un temps quelconque un accroissement de vitesse precisement égal à la vitesse qu'elle lui imprimerait dans le même temps, s'il partait de l'état de repos.

M

Ainsi à une époque t un mobile M est au point M avec une vitesse v — une force agit sur lui pendant le temps θ; cette force lui fait parcourir pendant ce temps, un espace e s'il partait de l'état de repos; en designant par e' la derivée de e, la vitesse que la force communiquerait au mobile partant du repos après le temps θ sera e'; et bien au bout du temps $t+\theta$ la vitesse du mobile sera $v+e'$. — Car soit un mobile μ animé de la vitesse v. — au bout du temps θ le mobile μ aura parcouru $v\theta$; donc le mobile M aura parcouru $v\theta+e$; sa vitesse à ce moment sera la dérivée de cette expression, c'a. d. $v+e'$. — *

Si la force agissait en sens contraire du mouvement du mobile on aurait le même raisonnement, et on verrait que la vitesse du mobile au bout du temps $t+\theta$ serait $v-e'$. —

Supposons que le mobile μ animé de la vitesse v soit en outre sollicité par une P pendant un temps θ; et que le mobile M soit sollicité par la force P et par une 2e force P_1; supp. que la force P_1 agissant sur M partant du repos lui fasse parcourir un espace e_1 pendant θ: au bout de temps $t+\theta$, μ aura parcouru $v\theta+e$; et M aura parcouru $v\theta+e+e_1$; la vitesse du mobile μ sera $v+e'$, et celle du mobile M sera $v\theta+e'+e_1'$, e_1' étant de la derivée de e_1; ainsi donc encore

* il n'est pas necessaire de supposer que M se meut d'abord d'un mouvement uniforme. Ceci a été démontré, lorsque nous avons démontré qu'un effet d'une force P_1 s'ajoute à l'effet de la force P. —

encore dans ce cas ~~la vitesse du mobile~~ est l'action de la force P, et indépendante de la vitesse précédemment acquise. ~~Ceci~~ Dans le 1er cas nous avions supposé la vitesse ~~acquise~~ constante et égale à ~~la dernière~~ dans la dernière partie la vitesse dont jouissait le mobile n'est plus constante, puisque nous supp. le mobile sollicité par une force constante. Ainsi le théorème est démontré d'une manière générale —

On conclut de là qu'une force constante agissant sur un mobile lui imprime un mouvement uniformément varié. — (Ng. Thom.)

× On appelle force égale de force qui agissant sur un même point dans les mêmes circonstances produisent le même effet. —

× On appelle poids d'un corps la pression exercée par le corps sur l'obstacle que l'empêche de tomber. — On peut comparer les forces avec les poids. —

Mais d'abord comparons les poids entre eux. (Sonnet.) On peut ensuite comparer les forces au poids, au moyen du dynamomètre. — (Sonnet.) — ; ainsi pour mesurer l'effort que fait un cheval traînant une voiture, on coupera les traits et on y interposera le dynamomètre. —

Un dynomètre plus exact est celui de Regnier perfectionné par Poncelet —

~~Dans les dynamomètres~~ Les forces pouvant être comparées au poids, le Kilogramme sera pris pour unité de force.

Deux forces constantes agissant pendant le même temps sur un même point matériel sont proportionnelles aux accroissements de vitesse qu'elles communiquent à ce point. — On a $F : F' :: u : u'$. (Thom.) —

Supposons que la force F' soit le poids p du point matériel; soit g l'accélération due à la pesanteur; on aura

$$F' : p :: u : g.$$

d'où $$F' = u \times \frac{p}{g}.$$

pour une autre latitude on aurait

$$F' = u \times \frac{p'}{g'}.$$

par suite $$\frac{p}{g} = \frac{p'}{g'} = \text{—} = \frac{F'}{u}.$$

c'est ce rapport constant qu'on appelle la masse du point matériel. — si on désigne cette masse par m on aura $p = mg$. et $F' = mu$. ×

On appelle masse d'un corps de dimension finies, la somme des masses des points matériels qui composent ce corps. si M est la masse du corps on aura

$$M = \frac{p}{g} + \frac{p'}{g} + \frac{p''}{g} + \text{—}$$

p, p', p'' — étant les poids des différentes molécules. — admettons maintenant que le poids du corps est égal à la somme des poids des différentes molécules, en posant $P = p + p' +$ — on aura $M = \frac{P}{g}$ ainsi la masse d'un corps est définie ici nous admettons la composit. des forces que nous n'avons pas encore vue: mais l'expérience démontre ce que nous venons d'admettre — car si dans chacun des plateaux d'une balance il y a un corps faisant équilibre à l'autre plateau, si on retire le corps en position, l'équilibre existera toujours; donc le poids d'un corps est égal à la somme des poids des molécules qui composent ce corps. —

Nous avons trouvé $F = mu$.

Une autre force F' qui appliquée à un point de matière lui communiq. une accélér. u' donnerait

$$F' = m'u'$$

on a donc $F : F' :: mu : m'u'$.

Nous avons vu aussi que $M = \frac{P}{g}$.

La pesanteur sollicitant indistinctement toutes les molécules d'un corps, on est conduit à admettre que le poids est en rapport avec la quantité de matière qui se trouve dans le corps; mais le poids ne peut suffire à donner une idée de la quantité de matière contenue dans le corps; car la quantité de matière contenue dans le corps est toujours la même, et le poids varie aux différentes latitudes; alors on prend le rapport du poids à l'accélération. — Dans un même lieu pour comparer entre elles les masses des différens corps, il suffirait de comparer entre eux les poids de ces corps.

On prend pour unité de force le Kilog.; si on prend l'unité de longueur égale au mètre, et le mètre pour unité de temps, l'unité de masse ne sera plus arbitraire; elle se tirera de l'équation $P = Mg$. Si on fait $M = 1$ il reste $P = g$; donc le poids qui correspond à l'unité de masse est représenté par g. C'est $9^{m}, 8088$.

Lignier

Cours de Mécanique

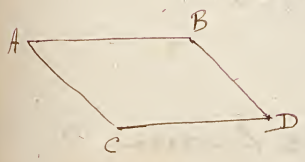
Composition et decomposition des vitesses

La nature montre qu'un point matériel peut être animé en même temps de plusieurs vitesses — bille roulant sur un bateau qui se meut sur l'eau; il est clair que la bille possède deux vitesses simultanées — en ayant égard aux mouv. de rotation et de translation du bateau elle aurait les vitesses. or il résulte du principe des mouvements relatifs que ces vitesses ne s'influencent pas: ainsi la bille se meut sur le bateau absolument comme si le bateau était en repos. —

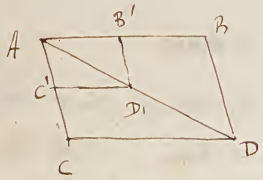
quand un mobile est animé de plusieurs vitesses, il ne prend qu'un seul mouvement qui est le mouvement resultant.

~~soit un point A; AB la direction suivie par le bateau; AC la direction de l'impulsion donnée à la bille —; supposons les vitesses du bateau uniforme, ainsi que la vitesse de la bille. soit AB le chemin~~

Soit A un point matériel; suppos. ce point animé de deux vitesses l'une dirigée suivant AB, l'autre suivant AC — supposons que ces deux vitesses soient uniformes; soit AB l'espace que A aurait parcouru s'il eut été animé seul de la vitesse suivant AB, au bout du temps t.; soit AC l'espace que A aurait parcouru pendant le temps t, s'il avait été animé de la seule vitesse dirigée suivant AC.; pour avoir la position du mobile au bout du temps t il faut par le point B mener BD ~~parallèle~~ égale et parallèle à AC(x), et le point D sera la position du mobile au bout du temps t.



Ceci résulte du principe de l'indépendance des mouvements simultanés. —



Le mobile a suivi la diagonale, soit v la vitesse suivant AB, et u la vitesse suivant AC.

on aura

$$DC = vt.$$
$$AC = ut.$$

d'où $$\frac{DC}{AC} = \frac{v}{u}.$$

soit D' la posit. du mobile à l'époque t'; on a

$$AB' = vt' \quad AC' = ut'.$$

d'où $$\frac{C'D'}{AC'} = \frac{v}{u}.$$

les triangles $AC'D'$, ACD ayant un angle égal compris entre des cotés proportionnels sont semblables; donc AD' se confond avec AD; donc le mobile se meut sur la diagonale.

la diagonale est décrite d'un mouvement uniforme; il résulte des mêmes triangles semblables

$$\frac{AD}{AD'} = \frac{AB}{AB'} = \frac{vt}{vt'} = \frac{t}{t'}.$$

donc les espaces parcourus sont prop. aux temps, ce qui est le caractère du mouvement uniforme. —

représentons par w la vitesse du mouvement résultant, on aura

$$AD = wt \quad AB = vt \quad AC = ut.$$

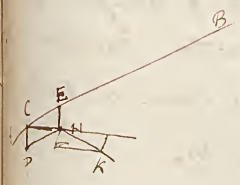
$$\frac{w}{AD} = \frac{v}{AB} = \frac{u}{AC}.$$

par conséquent si AB représente la vitesse v, et AC la vitesse u, la vitesse w du mouvement résultant sera représentée par la diagonale AD. —

Si donc un mobile est animé de deux mouv. rectilig. simult. et uniforme, le mouv. résultant sera rectiligne et uniforme; la direction et la grandeur de la vitesse du mouvement résultant est représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses.

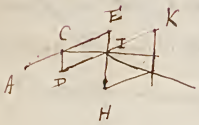
Cette démonstrat. est indépendante du temps; elle serait vraie pour un temps infiniment petit. elle est donc applicable au cas où la vitesse est variable, - car on peut toujours supposer que la vitesse est constante pendant un temps infiniment petit. -

Cette composit. de vitesses explique le mouvement curviligne; un point A a une vitesse dirigée suivant AB. supp. qu'il soit soumis à l'act. d'une force; cette force pour agir a besoin d'un certain temps. soit θ ce temps; pendant ce temps le mobile parcourt AC; et lorsque le mobile sera en C la force lui aura communiqué une vitesse que je représente par CD; alors au point C, le mobile pourra être considéré comme animé de deux vitesses, l'une dirigée suivant CB, l'autre suivant CD; la vitesse résultante sera dirigée suivant CH. et au bout du 2e instant le mobile sera en H et il continuerait à se mouvoir suivant CH si la force cessait son action; mais la force sollicitant toujours le mobile, il prendra la direction HK etc — en supposant la force agissant brusquement d'instant en instant on aura une ligne polygonale pour trajectoire du mobile; ~~chaque côté~~ au lieu d'agir brusquement la ~~vitesse~~ force agit d'une manière continue la ligne polygonale aura pour limite une courbe. chaque côté de la ligne polygonale représente la direction actuelle de la vitesse à la limite cette ligne devant tangente à la courbe; donc la vitesse

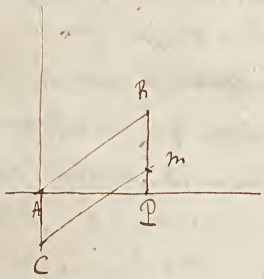


d'un mobile qui se meut sur une courbe et dirigée suivant la tangente à la trajectoire. —

Cas d'un projectile soumis à l'action de la pesanteur. Suppos. un mobile lancé avec une vitesse initiale dont la direction AC : au bout du premier instant le mobile est au point C il a deux vitesses CD et CE qui se composent en une CI. au point I il a deux vitesses IK = CE et IH = 2CD ; ou la vitesse augmente de quantités égales au bout de temps égaux — et on aura ainsi la trajectoire. —



Il est facile de voir que le mobile décrira une parabole —. Soit AB la direct. de la vitesse, suppos. que la pesanteur n'existe pas ; au bout temps t le mobile sera en B. — Si la pesanteur existait seule le mobile descendrait $AC = \frac{1}{2}gt^2$. ; donc au bout du temps t, le mobile ~~aura~~ sera en m.



Soient $AP = x$ $mP = y$.

$$x = at\cos\alpha.$$

$$y = at\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

En éliminant t on aura l'équation décrite par le mobile, "Celle-ci est

$$y = x\,tg\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{gx^2}{a^2\cos^2\alpha}. -$$

En pos. $a^2 = 2gh$ l'éq. devient

$$y = x\,tg\alpha - \frac{x^2}{4h\cos^2\alpha} -$$

éq. d'la parabole décrite —

Lignier

Cours de Mécanique —

Composition des accélérations. — Examinons d'abord le cas où les deux mouvements seraient rectilignes et uniformément variés. — En faisant identiquement le même raisonnement que dans le cas où les deux vitesses étaient uniformes, on arrivera aux mêmes conséquences. — Le mobile se mouvra sur la diagonale et son mouvement sera uniformément accéléré; l'accélération du mouvement résultant est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux accélérat. composantes. —

Considérons l'accélération dans le cas général. — Dans un mouvement rectiligne varié on appelle accélération à l'époque t, l'accroissement de vitesse que la force communiquerait au mobile dans l'unité de temps, si pendant cette unité de temps elle gardait l'intensité qu'elle avait au commencement. —

L'accélération est égale à la dérivée de la vitesse par rapport au temps. — En effet considér. deux positions m, m' d'un mobile assez rapprochés pour que la force de m en m' soit constamment croissante. Soit Δv l'accroiss. de vitesse que le mobile éprouve en passant de m à m'. — Soit φ l'accélérat. du mobile en m; soit φ' l'accélérat. en m'. on aura

m m'

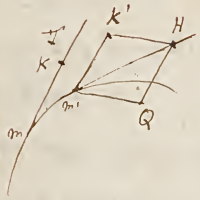
$$\varphi \Delta t < \Delta v < \varphi' \Delta t$$

d'où $$\varphi = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

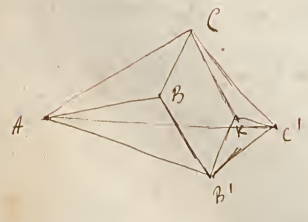
c'est la dérivée de la vitesse par rapport au temps. —

passons à l'accélération dans le mouvement curviligne

Supposons un mobile se mouvant sur une trajectoire Mm au point m le mobile est animé d'une vitesse $\underline{v}$ dirigée suivant la tangente mI à la trajectoire ; au bout d'un temps très petit le mobile sera venu en m' et la vitesse v' aura changé en grandeur et en direction. la vitesse v' peut être décomposée en deux vitesses dont l'une sera égale à v, et l'autre sera donnée par le parallélogramme de vitesses ; si mK représente v, prenons mK' égale et parallèle à mK ; soit $m'H = v$ $m'Q$ sera l'autre composante de v' ; soit $m'Q = u$ c'est la vitesse u qui combinée avec v donne la vitesse v'. — Le mouvement curviligne est dû à la vitesse u, qui évidemment est produite par une force on appelle accélération le rapport de u au temps infiniment petit. — c'est $\lim \frac{u}{\theta}$.



L'accélération se composent comme les vitesses. — Soit un point A animé de 2 vitesses simultanées AB, BC. — au bout d'un temps t la vitesse résultante sera AC. au bout d'un temps infiniment petit θ, les vitesses AB, BC ont été modifiées et sont devenues AB', B'C'. alors AC' sera la vitesse du nouveau mouv. résultant après le temps θ. — L'accélération du mouvement résultant sera $\frac{CC'}{\theta}$

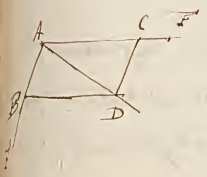


(on suppose que par un point de l'espace A on mene des ~~parallèles~~ lignes égales et parallèles aux vitesses d'un mobile se mouvant sur une ligne courbe).

Tirons BB'.; $\frac{BB'}{\theta}$ est l'accélération élémentaire du 1er mouvement composant. — Si on mene B'K egale et parallele à BC, $\frac{KC'}{\theta}$ sera l'accelerat. elementaire du 2e mouvement composant. — Si on joint CK, la figure BCKB' sera un parallelogramme, et CK = BB'. par consequent CC' est la diagonale du parallelogr. construit sur BB' et sur KC'. — Donc etc —

Composition et decomposition des forces. —

Soient deux forces F et F' constantes agissant sur un point A partant du repos. — Si la force F agissait seule, le point A parcourait AC d'un mouv. unif. accelere x; si F' agissait seule, le point A parcourait AB d'un mouv. uniformement accéléré pendant le temps t; la vitesse de l'indépendance des mouv. simultanés, le point A sous l'action des deux forces parcourra la diagonale de parallel. construit sur AC et AB, — d'un mouvement uniformément accéléré. Il existe donc une certaine force R constante capable de produire ce mouvement, cette force R sera la résultante puisqu'a elle seule elle produit le même effet sur le point A que les forces F et F'; la résultante est donc dirigée suivant la diagonale; elle est de plus représentée en grandeur par la même



x pendant le temps t

diagonale AD ~~en effet les forces constantes sont proportionnelles aux accélérations~~, si on représente F' par AC, et F'' par AB. —

En effet les forces constantes sont proportionnelles aux accélérations qu'elles produisent sur un même point. Soient r et f les accélérations de R et F', on aura

$$\frac{R}{F'} = \frac{r}{f}.$$

Mais $AB = \frac{1}{2} f t^2$.

$AD = \frac{1}{2} r t^2$. Donc

$$\frac{R}{F'} = \frac{AD}{AC}$$

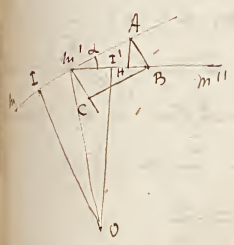
Si donc F' est représentée par AC, R sera représentée par AD. —

Ici nous avons supposé la force agissant sur le mobile partant du repos, on peut faire cette hypothèse puisque l'effet d'une force sur un point est indépendant du mouvement antérieurement acquis. Si on suppose le mobile animé d'une vitesse, il faudra composer cette vitesse avec la vitesse due à l'action de la force. —

Signier

Cours de Mécanique –

Nous avons vu que si un mobile se meut sur une courbe $mm'm''$ – suivant mm' avec une vitesse v, suivant $m'm''$ avec une vitesse v_1, la vitesse v_1 repr. par $m'B$ pouvait se décomposer en deux autres; l'une égale à v et l'autre égale à $m'c$ que nous avons appelé u. – Cette vitesse u est l'effet de la force qui sollicite le mobile –. C'est la variation de la vitesse v. $\lim. \frac{u}{\theta}$ est l'accélérat. élémentaire du mobile –



L'accélération AB peut on toujours la décomposer en deux l'une perpendiculaire à $m'B$, et l'autre dans la direction de la vitesse $m'B$. – abaissons du point A, AH perpendiculaire sur $m'B$, – AH et BH seront les deux composantes dont nous venons de parler. La normale AH à la courbe est dans le plan osculateur de la courbe, puisqu'elle est dans le plan de deux éléments consécutifs. ; à la limite AH devient la direction du rayon de courbure ; à la limite la direction BH sera la direction de la tangente. – Cherchons l'expression de ces deux composantes. Soit $Am' = v$, $m'B = v_1$ – on a

$$AH = v \sin\alpha \quad , \quad BH = v_1 - v\cos\alpha$$

α est l'angle de $m'm$ avec l'élément suivant $m'B$. – divisons ces deux quantités par θ –

$$\left.\begin{array}{l} \lim. \frac{v\sin\alpha}{\theta} = \text{Composante centripète} \\ \lim. \frac{v_1 - v\cos\alpha}{\theta} = \text{Composante tangentielle} \end{array}\right\} \text{de l'accélérat. } \lim. \frac{u}{\theta}$$

on peut écrire $\frac{v\sin\alpha}{\theta} = \frac{v\alpha}{\theta} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

et à la limite on voit que cette composante est $\lim. \frac{v\alpha}{\theta}$

on peut donc écrire

$$\lim. \frac{v \sin \alpha}{\theta} = \lim. \frac{v\alpha}{\alpha} \quad \text{ou bien}$$

$$\lim. v\frac{\theta}{\alpha} = v \lim. \frac{\frac{\alpha}{mm'}}{\frac{\theta}{mm'}}$$

en introduisant l'élément mm'. — Opérons un ou plusieurs de cette quantité en quantités finies —

Soit I le milieu de mm'; i' le milieu de l'élément mm'; les perpendiculaires élevées sur les lignes en leur milieu se rencontrent en un point O, le cercle décrit du point O comme centre avec Om pour rayon passe par les 3 points m, m', m'' — quand les trois points se rapprochent indéfiniment, le cercle prendra une position limite; on dit que le cercle est osculateur à la courbe. Soit r le rayon de ce cercle, ρ son rayon à la limite

angle $Oi' = \frac{\alpha}{2}$ et par suite $Om' = \frac{\alpha}{2}$

$im' = m'O \sin m'OI = r \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{mm'}{2}$. d'où $r = \frac{mm'}{2 \sin\frac{\alpha}{2}}$

passant à la limite on a $\lim. r$ ou $\rho = \lim. \frac{mm'}{\alpha}$. D'un autre côté $\lim. \frac{mm'}{\theta} = v$. donc $\lim. \frac{v\theta}{\alpha} = \frac{v^2}{\rho}$.

reprenons l'autre composante. on peut écrire

$$\frac{V_1 - V\cos\alpha}{\theta} = \frac{V_1 - V}{\theta} + \frac{2V\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\theta}$$

$$\frac{V_1 - V\cos\alpha}{\theta} = \frac{V_1 - V}{\theta} + \frac{2V\sin\frac{1}{2}\alpha}{\theta} \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha.$$

Or le facteur $\frac{2V\sin\frac{1}{2}\alpha}{\theta}$ a pour même limite ~~la même quantité~~ que $\frac{v\alpha}{\theta}$, ~~a~~ qui vient d'être trouvée; l'autre facteur $\sin\frac{1}{2}\alpha$ a pour limite zéro — donc à la limite $\frac{2V\sin\frac{1}{2}\alpha}{\theta} \sin\frac{1}{2}\alpha$ est égal à zéro —. maintenant $\lim. \frac{V_1 - V}{\theta}$ est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, que nous pouvons désigner par V'. — Ainsi l'accélération peut être regardée comme la résultante de deux composantes, l'une centripète égale à $\frac{V^2}{\rho}$, l'autre tangentielle égale à V'. —

on peut faire la même décomposition sur la force qui sollicite un point libre; ou bien une force quelconque elle pourra se décomposer en deux forces, l'une dirigée suivant le rayon de courbure, l'autre dirigée suivant la tangente — L'accélération dont nous venons de trouver les composantes, $dm\frac{u}{\theta}$, est l'effet de la force elle est aussi égale à $\frac{P}{m}$; il en résulte que la force motrice pourra être décomposée en deux composantes, l'une centripète $\frac{mv^2}{\rho}$, l'autre tangentielle mv' —

La force centripète est toujours dirigée dans la concavité de la courbe — La force tangentielle n'est pas toujours dirigée sur la tangente dans le sens du mouvement — elle agit dans le sens du mouv. quand la vitesse est croissante ou $mv' > 0$; en sens contraire si la vitesse décroît ou $mv' < 0$.

Si on désigne par T' la force tangentielle, F' la force centripète, les eq. du mouv. d'un point seront

$$T' = mv' \quad F' = \frac{mv^2}{\rho} \text{ ---}$$

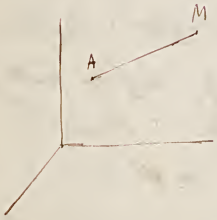
Parler de la force centrifuge — : sa influence sur la variat. de la pesanteur à la surface de la terre —

Cette force n'est qu'une réaction; dans le cas d'un point libre il n'y a pas de force centrifuge — —

Considération que se trouvent dans Sturm —

en partant toujours du même considération on peut trouver l'équat. du mouvement curviligne sous leur forme la plus gén.

Considérons d'abord un mouvement dans l'espace rectiligne et uniforme — soit v la vitesse du mouvement — on aura $AM = vt$. soient $a.b.c$ les coord. du point A, $x\,y\,z$ les coordonnées du point M — soit α l'angle que la droite AM dans le sens du chemin parcouru fait avec la partie positive de l'axe des x — on aura $x-a = vt\cos\alpha$ — ou —



$$x = a + vt.\cos\alpha$$

de même $$y = b + vt\cos\beta$$

$$z = c + vt\cos\gamma.$$

Ces trois équat. déterminent le mouvement du point. — chacune d'elles est aussi l'équat. d'un mouvement rectiligne uniforme — ; car la project. du mobile sur les 3 axes se meuvent d'un mouvement uniforme. — les vitesses de ces 3 mouvements sont les composantes $v\cos\alpha$, $v\cos\beta$, $v\cos\gamma$ de la vitesse v du mobile. —

Réciproquement si les 3 vitesses des project. sont uniformes, le mouvement du mobile dans l'espace est rectiligne et uniforme. — ; en désignant par $p\ q\ r$ les vitesses des 3 projections on aura

$$x - a = pt$$
$$y - b = qt$$
$$z - c = rt.$$

quelle que soit la route suivie par le mobile ; pour aller de A en M on a $AM = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = t\sqrt{p^2+q^2+r^2}$. donc d'abord la distance AM croît proportionnellement au temps, la direction AM est constante — car on $\cos\alpha = \frac{x-a}{AM} = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$

de même $\cos\beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ $\cos\gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$. —

Signier

Cours de Mécanique —

de passe de la au cas d'un mouvement quelconque. —
Supposons que le mouvement du mobile soit déterminé par les
trois équat.

$$x = f(t)$$
$$y = \varphi(t)$$
$$z = \psi(t). -$$

à l'époque t quand le mobile est en M, supposons que la force
cesse tout à coup son action — Le mobile prendra un mouvement
rectiligne et uniforme. — La projection prendra aussi un
mouvement ~~rectiligne~~ et uniforme. Ce mouvement est il le
mouvement uniforme que prendrait la projection, si on supprimait
la force fixe qui donnait à cette projection son mouvement
précédent ? oui — en effet soit v la vitesse qui anime le
mobile quand il est en M. Soit α l'angle que la direct.
de cette vitesse fait avec la partie positive de l'axe des x —
le mobile continuant à se mouvoir va de M en M' — sa vitesse
varie d'une manière continue ; elle devient v', et v' ne diffère
de v que par un infiniment petit ; de même α devient α',
et α' diffère infiniment peu de α. — Quand le mobile
est en M et en M' sa projet. sur l'axe des x. a les
vitesses $v \cos\alpha$, et $v' \cos\alpha'$, et ces deux vitesses d'après la
remarque précédente diff. infiniment peu. La vitesse de la
projection est donc une fonction continue du temps. — et si
on se reporte à la démonstration faite au commencement du
cours pour montrer que la vitesse est la dérivée de l'espace
parcouru par rapport au temps, on voit que cette démonstration

Instant d'un temps θ infim. petit

Il suffira qu'une chose, c'est que la vitesse est une fonction continue du temps. — on entend nullement compte de la force dans dans le cas que nous occupe, puisque la vitesse est une fonction continue du temps, la vitesse de la projection sur l'axe des x sera $f'(t)$. — de même sur les autres axes $\varphi'(t)$ $\psi'(t)$. — V étant la vitesse du mobile dans l'espace on aura

$$V = \sqrt{f'(t)^2 + \varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}.$$

Cette vitesse est dirigée suivant la direct. du dernier élément, suivant la tangente —

On sait que $v = \lim. \frac{\Delta s}{\theta} =$ c'est la dérivée de l'arc par rapport au temps — soit s' cette dérivée. on aura $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$.

x' y' z' désignant les dérivées de x, y, z par rapp. au temps

On peut établir les équat. générales du mouvement curviligne —

Supposons le mobile arrivé au point M de sa trajectoire avec une vitesse acquise v, et sollicité par une force F.

Soient u, v, w les comp. de la vitesse parallèles aux axes

X Y. Z — de la force id —

Supp. pour un moment qu'on supprime X et u; alors le mobile ne pourrait se mouvoir que dans un plan parallèle à YZ —; si on rétablit X et u l'effet de cette force et de cette vitesse sera de déplacer le point M du plan parallèle à YZ dans un plan infiniment voisin; et d'après le principe du mouvement relatif, ce mouvement parallèle à l'axe

de x et indépendant du mouvement effectué dans le plan parallèle à YZ ; ce mouvement a lieu comme si X existait seule — donc $X = mx''$ -

de même $Y = my''$

$Z = mz''$ —

x'', y'', z'' sont les dérivées seconde de ces quantités inconnues.

Ce chapitre se terminerait par la condition d'équilibre d'un point matériel —

Si le point est libre il faut que la résultante soit nulle ; $R = 0$; si on la projette sur un axe qlq sera nulle ; soit a l'angle de R avec Ox on aura $R \cos a = 0$; mais $R \cos a = \Sigma P \cos \alpha$. donc $\Sigma P \cos \alpha = 0$ de même $\Sigma P \cos \beta = 0$ $\Sigma P \cos \gamma = 0$

Ces trois équat. sont nécessaires — sont elles suffisantes ? oui : et même les axes peuvent être qlq. — car si on a ces trois éq. $\Sigma P \cos \alpha = 0$ $\Sigma P \cos \beta = 0$ $\Sigma P \cos \gamma = 0$ il en résulte d'abord que $R \cos a = 0$. ce qui donne $R = 0$ ou $a = 90°$ — on venant de même que la résultante devrait être perpend. aux deux autres axes ce qui est impossible ; donc on doit avoir $R = 0$ — donc l'équilibre existe. —

Si le point n'est pas libre il faudra introduire la résistance de la courbe ou de la surface. —

etc etc. —

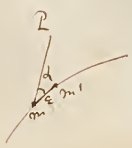
Travail de force —

En mecanique travailler c'est vaincre une resistance qui se renouvelle sans cesse. Indépendamment de l'effort exercé pour vaincre une resistance, il faut tenir compte du chemin parcouru par le point d'application de la force. — Si on veut puiser de l'eau dans un puits, le travail dépend de la quantité d'eau tirée et de la profondeur du puits; si on veut enlever une pierelle d'un corps, il faut exercer un certain effort et faire marcher l'outil dans le sens de la molecule — Ce qui se passe dans l'industrie c'est le travail estimé en raison composée de ces deux elements, de la resistance vaincue et du chemin parcouru par le point d'applicat. de la force. —

L'unité de travail est une résistance vaincue le long de 1 metre — ou le travail mecanique pour élever 1 Kilog. à 1 metre de hauteur., cette unité s'appelle <u>Kilogrammetre</u> : on la designe par K.M. —

Il me faut parler aussi au cas où l'effort est dirigé dans le sens du chemin parcouru —, le contraire se passe ainsi —

On appelle <u>travail élémentaire</u> d'une force, le produit de la force par la projection sur sa direction de l'élément de chemin parcouru par le point d'application. Le travail élémentaire d'une force sera représenté par P E cos α



E est le chemin parcouru. —

Lignier

Cours de Mécanique

Le travail total d'une force dans l'intervalle d'une position à une autre est la somme des travaux élémentaires effectués pendant cet intervalle — c'est $\Sigma P \varepsilon \cos\alpha$. Sa détermination est du ressort du calcul intégral. —

Le travail élémentaire peut être défini d'une autre manière ; car on a $P \varepsilon \cos\alpha = P \cos\alpha \times \varepsilon$; alors le travail élémentaire sera le produit de la composante tangentielle par le chemin parcouru. —

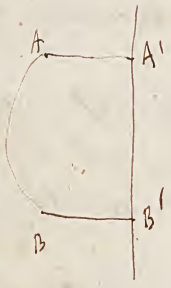
Le travail est nul dans trois cas — 1, $R = 0$; 1, $\varepsilon = 0$, et 1, $\alpha = 90°$ —

Il résulte de là que dans le transport horizontal des fardeaux le travail est nul, s'il n'y a pas de frottement. — un homme qui transportait un fardeau sur son dos effectuerait un travail nul ; et cependant l'effet produit serait utile — le serait une cas à considérer à part. —

Quand $\alpha < 90$, la projection de l'élément mm' sur la direction de la force tombe sur la direction même de la force. — on dit alors que le travail est <u>moteur</u>. Sa expression est positive. 1, $\alpha > 90$, la projet. de mm' tombe sur le prolongement de la direction de la force ; le travail est <u>résistant</u> ; sa expression est négative. —

Le travail total dépend généralement du calcul intégral ; il y a certains cas où le calcul du travail total peut se faire d'une manière élémentaire. —

Si la force est constante et agit tang. tangentiellement à la trajectoire, le travail total sera $\mathfrak{T} = Pe$ & étant l'espace parcouru ; si un poid. P descend verticalement d'une hauteur h, le travail produit sera Ph.



Si la force P est constante et parallèle à elle même on peut avoir le travail total ; soit par ex. un mobile pesant descendant le long d'une courbe AB quelconque — soit $A'B' = h$, le travail produit par allant de A en B sera Ph.

quand le mobile descend selon la verticale on a vu qu'on a $v^2 - v_0^2 = 2gh$, de suite qu'on a

$$m(v^2 - v_0^2) = 2mgh.$$

mais $mg = P$. donc

$$m(v^2 - v_0^2) = 2Ph.$$

donc le double du travail produit est égal à $m(v^2 - v_0^2)$. le produit $m(v^2 - v_0^2)$ est l'accroissement de force viva ; donc le double du travail produit est égal à l'accroissement de force viva —

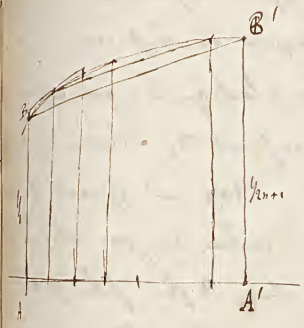
Si la force est ~~constante~~ variable d'intensité et de direction, le travail total de la force sera

$$\lim. \Sigma T\varepsilon \ldots$$

Cette somme pourra être évaluée en calculant l'aire d'une courbe —.

Méthode de M. Poncelet. — ; elle suppose que l'intervalle compris entre les abscis. extrem. a été divisé en un nombre pair de parties égales. —

Soit h l'intervalle constant compris entre deux ordonnées consécutives.



L'aire est comprise entre les deux aires

$$h\left(2\sigma - \frac{y_2+y_{2n}}{2} + \frac{y_1+y_{2n+1}}{2}\right).$$

et $h \times 2\sigma$.

en posant $2\sigma = 2(y_2+y_4+ \ldots + y_{2n})$.

on prend pour l'aire approchée

$$h.\left\{2\sigma - \frac{y_2+y_{2n}}{4} + \frac{y_1+y_{2n+1}}{4}\right\}.$$

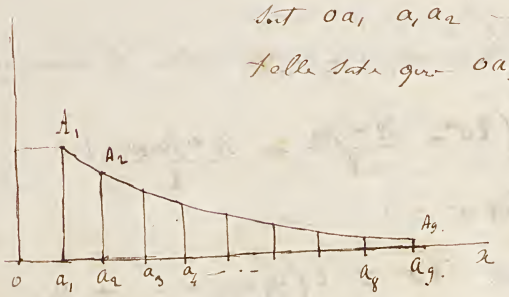
l'erreur sera plus petite que $\left\{\frac{y_2+y_{2n}}{4} - \frac{y_1+y_{2n+1}}{4}\right\}h$.

on peut avoir une expression géométrique de cette erreur. de sorte que sur l'inspection même de la courbe, on voit l'erreur commise; de sorte que l'on voit immédiatement si le nombre des ordonnées calculées est suffisant; c'est l'avantage de cette méthode sur les autres.—

~~Si nous voulons évaluer les travaux de dilatation~~. Exemple — Supposons qu'on introduise dans une pièce de canon un cylindre de bronze, renfermant de l'air comprimé, et derrière un boulet. — Si on lâche une détente, le gaz s'échappera et chassera le boulet. — Supposons qu'on partage la pièce en parties d'égales longueurs, dans chacune de ces intervalles on connaîtra la force élastique du gaz; comme on connaît aussi le chemin parcouru, on pourra calculer le travail total de la force pendant le temps que le boulet met à sortir du canon —

Gaz comprimé à 1200 atmosph.; le volume primitif du gaz ~~pris~~ est le $\frac{1}{9}$ de l'âme de la pièce. la longueur de la pièce est de $9^m,1$.—

prenons une droite, sur laquelle nous prendrons 9 parties égales; chacune représentera le $\frac{1}{9}$ de la longueur de la pièce. Soit Oa_1, a_1a_2 — a_8a_9 les différentes parties; — de telle sorte que Oa_9 représente la longueur de la pièce. — au



commencement la force élastique du gaz est de 1200 atmosph. au point a_1 élevons a_1A_1 qui représentera 1200 —; quand le boulet sera en a_2, le volume du gaz sera doublé, sa force élastique sera 2 fois plus petite. au point a_2, élevons a_2A_2 perpendiculaire sur OR; — et prenons a_2A_2 égale à la moitié de A_1a_1, de sorte que A_2a_2 représentera 600 atmosphères — quand le boulet sera en a_3 le volume du gaz sera triplé. la force élastique sera réduite de 400 atmosph.; alors on prendra a_3A_3 égale à 400, et on continuera ainsi jusqu'à a_9 inclusivement; en joignant les points par un trait continu on aura une courbe dont l'aire représentera le travail total de la force. ici on peut avoir cette aire exactement, car on connaît la courbe: c'est une hyperbole; car ici le produit xy est constant. — l'équat. de l'hyperbole sera $xy = Oa_1 \times A_1a_1 = 1200 \times \frac{3,1}{9} = 413,32$ environ. Or $xy = m^2$. — l'aire $A_1a_1a_9A_9$ est $m^2 k.g. = 908,18$. — cette expression ne représente pas le travail. — . Car notre pression est évaluée en atmosphères — . la pression d'une livre par centim. carré est $1^{kil},033$. — . il faut tenir compte de la section de l'âme de la pièce — le diamètre du pièce de 24 est $0^m,15$. alors la section de l'âme est $\frac{3,1416 \cdot (0,15)^2}{4} = 176$. centim. carré. il faut multiplier 176 par 1,033. — ; il faut multipl. 176 par 1,033 et le nombre de kilos obtenus sera le nombre de kilos pression par la pression d'une atmosphère — on trouve 181.81. multipliant par 908,18 on a le travail en kilogrammètres. et trouve 165116 kgm.

Regnier

Cours de mecanique

effort moyen. — C'est une force fictive constante, capable de produire le meme travail qu'une force variable appliquée au mobile. on suppose que cet effort agit tangentiell. à la trajectoire; — si donc l est le chemin parcouru, le travail de l'effort moyen sera Fl — on aura donc $Fl = \Sigma T.\varepsilon$. d'où

$$F = \frac{\Sigma T \varepsilon}{l}.$$

ordinairement dans la pratique la courbe du travail est sinueuse, mais elle reste toujours à peu près parallèle à l'axe des x, comme à la figure; on préfère substituer à ce travail variable, un travail constant uniforme qui produise le même effet que le travail variable; — on remplace cette courbe par une parallèle à l'axe des x —

dans le travail nous n'avons pas introduit l'idée du temps. — souvent dans les machines à vapeur on avait à considérer des nombres de kilogrammètres très considérables et embarrassant. alors on estime le travail à la seconde; on prend une autre unité, qui est le cheval vapeur; cette unité représente un travail de 75 kilogrammètres par seconde. —

Le travail élémentaire d'une resultante de deux forces est égal à la somme algébrique des travaux élémentaires des deux composantes. —; et ceci a lieu pour un nombre q/q. d'forces. —

Soit R la resultante — des forces $P\ P'\ P''$ — appliquées en un même point m. soit mm' le chemin infiniment petit parcouru par le mobile m — soit α l'angle que R fait avec mm'; $\alpha\ \alpha'$ — les angles que P, P' — font avec mm' on a

$$R\cos\alpha = \Sigma P\cos\alpha.$$

multipliant deux membres par ε le chemin parcouru, il vient

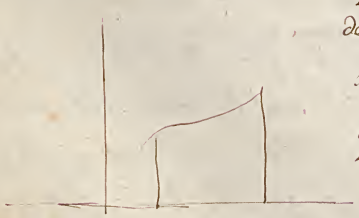
$$R\varepsilon\cos\alpha = \Sigma P\cos\alpha\,\varepsilon. —$$

Comme cette relation a lieu pendant toute la durée du mouvement, elle

s'applique au travail total des forces. —

Condition d'équilibre de forces appliquées à un mon point ; il faut et il suffit que la somme algébrique des travaux élémentaires soit nul pour un déplacement q/q. — Car si le point m est libre il faut que la resultante soit nulle ; si m n'est pas libre il faut que la resultante soit normale à la courbe ou à la surface sur laquelle il est assujéti à rester. — Dans ce dernier cas le travail est nul. — Pour s'assurer que la resultante est nulle, il faut que la somme des travaux soit nulle par rapport à deux mouvements dans une même place —

relation entre la force vive et le travail — Supp. que m decrive une trajectoire, — supp que ce point soit libre, il est sollicité par une force P ; cette force peut être decomposée en deux autres, l'une centripète, l'autre tangentielle — ; ces deux ont pour expressions $\frac{mv^2}{\rho}$, mv' — ; par conséquent le travail élém. de P est egal à la somme algébrique des travaux élémentaires de ses composantes. — ; la force centripète ne donne pas de travail — donc le travail de la force P est egal à $mv'\varepsilon$, ε étant l'élément de chemin de parcours ; ~~subrdonnant le travail~~. Maintenant $\varepsilon = v\theta$; donc le travail de force P est egal à $mvv'\theta$. Le travail total effectué en passant d'une position à une autre sera $\sum_t^{t'} mvv'\theta$, ou bien $\sum_t^{t'} \theta . x$ (derivée de $\frac{mv^2}{2}$) ; pour avoir l'évaluation du travail on prendra 2 axes : l'abscisse representera le temps et l'ordonnée representera la derivée des forces vives. — L'aire de la courbe ainsi obtenue sera le travail de P. Cette aire est donc fonction du temps, qui en pour derivée l'ordonnée. Mais l'ordonnée est derivée de $\frac{mv^2}{2}$; par suite en designant par τ le travail de la force P, on aura $\tau = \frac{1}{2}mv^2 + C$



Si le point mobile n'était pas libre, en prenant le cas du cas comme libre, et introduisant la réaction de la courbe ou de la surface, ce qui ne modifierait pas le travail, en supposant que il n'y ait pas frottement —

force d'inertie — quand entre un corps au moyen d'un cordon le long d'une ligne droite, de manière à lui faire parcourir un mouvement accéléré. ; si on introduit un dynamomètre entre deux parties de la corde, le dynamomètre a ceux une tension constante. Ce qui montre que les deux extrémités de fil sont soumises à une tension constante. Il est tiré dans un sens par la force motrice, et dans le sens opposé et par la réaction du corps. ; c'est cette réaction que l'on appelle force d'inertie. —

On étend ce principe à ~~deux points~~ tout système de points matériels agissant l'un sur l'autre, qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas de liens entre ces points. ; ainsi soient deux points m et m' agissant l'un sur l'autre. ; l'action aura lieu sur la droite qui joint le point m et le point m', en supposant que mm' et m'm ne soient pas comparables à la longueur mm'. ; si m agit sur m' de manière à lui donner une certaine quantité de mouvement, on admet comme principe que m' agira sur m pour lui communiquer la même quantité de mouvement. — on accepte cela comme un axiome. (précédemment supposant du bon physique, ici c'est une induction). Ceci ne paraît pas évident à priori ; ?

m' m

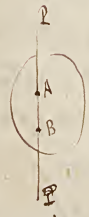
quand il s'agira d'un point m faisant partie d'un système quelconque, on appelle force d'inertie de ce point m, une force égale et contraire à celle qui produirait le mouvement de ce point m, s'il était libre. Cette force d'inertie est toute fictive. — la force effective se décomposant en deux l'un centrifuge l'autre tangentielle, la force d'inertie se décomposera

les deux forces l'une centrifuge, l'autre centripète — on dit souvent que $\pm \frac{1}{2}(mv_2 - mv_1^2)$ qui est égal au travail de la force motrice est égal au travail de la force d'inertie — . C'est ce que j'appelle glgs pour le travail de l'inertie —

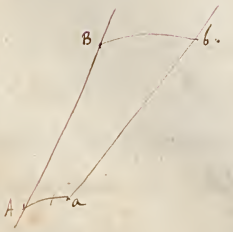
Forces appliquées à un corps solide —

Dans la nature il n'y a pas de corps réellement solides — les corps de la nature sont très peu dilatables, très peu extensibles; c'est seulement quand sous l'influence des forces qui leur sont appliquées ils ont acquis leur maximum d'extensibilité, que nous les supposons solides — .

On peut transporter le point d'application d'une force en un point quelc. de sa direct. pourvu que ce point soit lié invariablement au premier — . Pour démontrer ceci ~~on suppose~~ on s'appuie sur un lemme; on suppose que deux forces égales appliquées en sens contraires en deux points de la même direction se font équilibre; ceci pas peut être accepté en admettant qu'un tout est symétrique autour de AB; mais alors on admet qu'il n'y a action de A en B de molécule à molécule — . Du reste ce principe peut se vérifier par l'expérience au moyen du dynamomètre —



Le travail élémentaire de la force est le même pour tout déplacement élémentaire de la droite d'application (démonstrat. géométrique Cours de Mécan. — on démontre que si des forces agissent aux extrémités d'une même droite le moment virtuel est égaux et de ~~même~~ signe contraire.

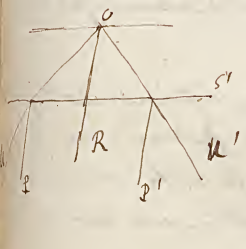


Regnier
3

Cours de Mécanique

Composition et equilibre de forces concourantes en un même point d'un corps solide. — d'après ce qui vient d'être dit a pouvoir transporter toutes les forces au même point de concours, le travail des forces n'en a pas changé. — et alors pour que il y ait equilibre il faut que la somme des travaux elémentaires soit nulle —

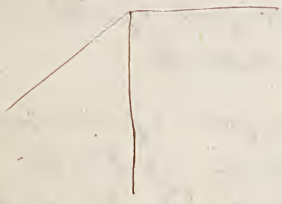
Composition de forces parallèles au moyen du parallélogramme des forces —. Le travail de la resultante est encore egal à la somme des travaux des composantes. — Centre de forces parallèles — le moment de la resultante est egale à la somme des moments des composantes —.



Le travail de la résultante est égal à la somme des travaux des composantes, — en effet. ~~le travail des forces P, P' est egal au travail des forces U et V, qu'on peut supposer appliquées au point O.~~ — on a $C.R = C.U + C.U' = C.P + C.S + C.P' - C.S' = C.P + C.P'$. donc le travail de la resultante est egale à la somme des travaux des composantes. — Cette somme est demontrée pour deux forces parallèles, — si on a un nombre quelconque de forces, il en sera encore de même. —

A l'occasion des forces parallèles, quand on cherche la resultante de deux forces ~~egales~~ parallèles et contraires on rencontre le cas du couple —, (on le montrera dans un cours). —

Si on considère un syst. de corps pesants P P' P'' — dont le centre de gravité soit g g' g'' — soit G le centre de gravité du système, au point G on a une resultante egale à P + P' + P'' — ; le travail de la resultante sera egal à la somme des travaux des composantes — si le système se meut de telle sorte que la projection du déplacement de g sur la vertical soit h — il y a la somme des travaux elémentaires sera $Ph + P'h' +$ — et cette somme sera egale à $(P + P' + P'' + \text{—})\,H$, H étant la projection sur la verticale du déplacement du centre de gravité du système. —



autr. demontr. que reposent sur les moments. —

on a $$RZ = \Sigma pz.$$

Z est la distance du centre de gravité du système à un plan ~~parallèle~~ perpendiculaire aux forces; z la distance du centre de gravité d'un des corps au même plan. On donne un déplacement, — supposons que Z devienne Z_1, z devienne z_1, z' devienne z_1' etc.; on aura encore

$$RZ_1 = \Sigma pz_1.$$

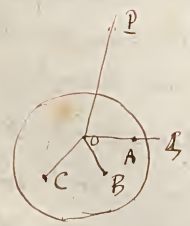
Retranchons membre à membre il vient.

$$R(Z-Z_1) = \Sigma p(z-z_1). —$$

Le second membre représente bien la somme des travaux de toutes les molécules. $(Z-Z_1)$ est la projection verticale du chemin parcouru par le centre de gravité du système. —

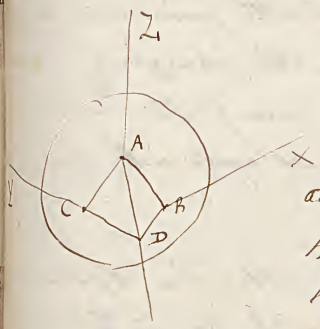
Dans l'industrie cequ'on appelle travail utile est précisément le produit du poids par la hauteur d'élévation du fardeau dans le sens vertical. — on n'entend pas compter de la route suivie dans le sens horizontal ne soit pas considérable, c'est un travail à payer à part. —

Composition et équilibre des forces appliqué à un corps solide.



Soit un corps auquel est appliqué une force P; cette force peut être décomposée en 3 autres passant par 3 points pris de corps — A, B, C — soient A, B, C 3 points du corps; joignons O aux points A, B, C; on pourra décomposer la force P suivant les trois directions OA, OB, OC par la règle du parallélipipède, et on pourra ~~composer~~ détacher transporter les trois composantes aux points A, B, C, sur leur direction; on pourra répéter la même chose pour les forces appliquées au corps. —

Supp. qu'on répète cela pour toutes les forces qui peuvent être appliquées au corps; il est évident qu'on sera ramené à 3 groupes de forces; l'appliq. en A, en B, en C. les forces appliq. en A peuvent se réduire à une seule; de même pour les forces appliq. en B, et celle appliq. en C. —



Supposons cela fait; soit X la force appliquée en B. Soit Y la force appliquée en C; et Z la force appliquée au point A. —

on peut réduire ces ~~trois~~ forces à deux dont l'une passera en A par exemple ~~—~~ ; en effet:
les plans ABX, ACY se coupent suivant une certaine droite AD; si ces deux plans se confondaient, AD serait une ligne qlq. tracée dans ce plan et passant par le point A; soit D un point de cette droite. —; joignons le point D au point C et au point B. — ; on peut décomposer X en deux forces x et x' suivant AB et BD, ce qui est possible puisque AB et BD sont dans une même plane avec BX; de même je décompose la force Y en deux forces y et y' dirigée suivant CA et CD. les deux forces x' y' concourent en D; on peut les y supposer appliquées; et les composer en une résultante U; de même les forces x et y concourent en A; on peut les composer en une seule force V appliquée en A. —

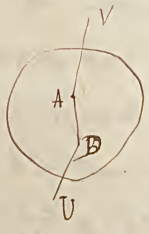
avec la force Z

Donc un système qlq. de forces appliquées à un corps solide peut toujours se réduire à deux U et V, dont l'une V passe ~~certain~~ par un point A donné arbitrairement dans l'intérieur

on aura $\Sigma TP = TU + TV$. —

C'est facile à voir ; on a remplacé chaque force P par ses composantes passant par A, B, C — ; or dans le parallélogramme des forces, le travail de la resultante est egal ~~au travail~~ à la somme des travaux elementaires. — donc par cette premiere décomposition la somme des travaux des forces n'a pas été changée ; en allant poursuivant la serie de ces points et de decomposition on verra que la somme des travaux des composantes est egale à la somme des travaux des deux forces U et V.

Ceci posé, la condit. d'equilibre d'un systeme de forces appliquées à un corps solide est que $\Sigma TP = 0$ pour tous les deplacements compatibles avec la liaison du systeme —



En effet, pour qu'il y ait equilibre, il faut que les forces U et V soient egales et directement opposées — ; c'est a peu près evident ; il peut arriver cependant si l'equilibre existe, elle sera troublée en faisant le point A ; dans ce cas ~~passe par le point A~~ ; mais alors l'effet de la force V sera détruit, il ne restera que la force U, dont l'effet sera de faire tourner le corps autour du point A ; à moins que U ne passe par le point A ; en demontrant de meme en faisant le point D que la force V doit être dirigée suivant AD ; dans ce cas les deux forces reciproquement se font equilibre quand elles sont egales et de sens contraire.

Il faut remarquer que la condition d'equilibre n'implique pas le repos du corps ; ~~la raison qu'il est dans un repos~~ ~~quelque soit un pour une~~ ; il pourrait être animé d'un mouvement qlq et c'est dans l'hypothese d'un mouvement qlq. qu'on devrait avoir $\Sigma TP = 0$.

~~Il~~ est vrai que dans le cours de la demonstration, nous nous sommes appuyés sur ce que le corps était en repos ; et cela est permis, attendu que si des forces appliquées à un corps en mouvement se font équilibre, elles devraient encore se faire equilibre dans le cas où le corps serait en repos. —

Pignier

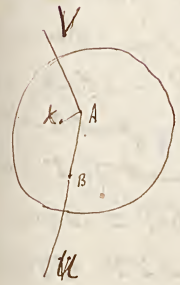
Comm. de mecanique

Si les forces U et V sont egales et contraires on aura

$$\Sigma U + \Sigma V = 0$$

donc on aura $\Sigma \Sigma P = 0$ —

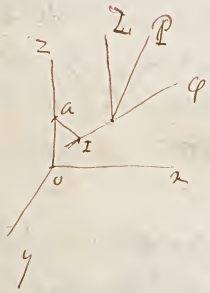
La reciproque est elle vraie ? si on a $\Sigma \Sigma P = 0$ pour tout deplacement possible, il y aura encore equilibre — en effet je dis que si cette condition est remplie, les forces U et V seront egales et contraires ; ~~en effet~~ or on a par hypothese $\Sigma U + \Sigma V = 0$.



et cela avec pour tout déplacement possible ; or parmi tous ces deplacements on peut en imaginer un dans lequel le point A soit fixe, et le corps tournerait autour du point A alors le travail de V est nul ; donc le travail de U doit être nul. donc U est normale au déplacement. — or B décrit une sphere dont le centre est en A ; donc U doit coincider en A. on ferait voir de même que V doit coincider en B. ; donc les forces sont sur le prolongement l'une de l'autre. : supposons les appliquées en A ; si on donne arbitrairement un deplacement q/q. AK, on se fera avoir $(V+U)AK = 0$ qu'autant que $V = -U$; donc les deux forces U et V sont egales et directement opposées —

C'est de cette équat. qu'on deduira dans chaque cas les condit. d'equilibre — —

on peut avoir les equat. d'equilibre d'une force appliquée à un corps solide — si on deplace le corps parallelement à l'axe de x, de maniere que chaque point parcoure un élément de chemin E alors la somme des travaux sera $\Sigma X E = 0$, ou $E \Sigma X = 0$ on aurait de même $\Sigma Y = 0$ $\Sigma Z = 0$.



avec 3 trois rotations autour de chacun des trois axes on aura les trois equations des moments. — donnons une rotation autour de l'axe OZ. — soit P une force d'appliquée. Decomposons en deux, l'une P_1 parallèle à OZ, et l'autre perpendiculaire à cet axe. — pour un déplacement obtenu en faisant tourner le corps autour de OZ on aura $\mathcal{C}P = \mathcal{C}Z + \mathcal{C}Q$; or $\mathcal{C}Z = 0$ puisque Z est perpendiculaire au chemin parcouru; donc $\mathcal{C}P = \mathcal{C}Q$. soit a le point ou l'axe OZ est coupé par un plan perpend. passant par le point d'appl. de P. — abaissons aI perp. sur Q; et transport. le point d'applic. de Q au point I; le travail de Q est egal à Q multiplié par le déplacement de I; or le déplacement tangentiellement à IQ; on aura $\mathcal{C}.Q = Qq\omega$; $q = aI$; ω est le déplacement du point I; donc $\Sigma IP = \Sigma IQ\omega = Q\omega\Sigma IQ = 0$ — on aurait de même les deux autres equations —

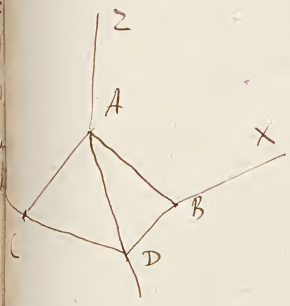
on a 6 equat. —; 6 equat. sont necessaires sont elles suffisantes. — oui car elles expriment que les forces U et V sont egales et contraires. —

en effet: appl. les 3 1ère equat. aux deux forces U, V elles signifient que les forces sont egales, parallèles et de direction contraire. — Car soit X, Y, Z, les compos. de U, X', Y', Z'. celles de V. on a — donc $X = -X'$ $Y = -Y'$ $Z = -Z'$ donc les deux forces sont egales et contraires —

elles sont direct. opposées. — en effet; supposons que décomposit. ait été faite de telle sorte que la force U ait été appliquée en O à l'origine; l'autre force V sera appliquée en un point q(x, y, z). or la travail du couple est nul quand les moments on a $L = 0$ $M = 0$ $N = 0$ or L est la somme des moments des forces par rapport à Ox; alors U ne donne rien dans L; donc le moment de V par rapport à Ox est nul; donc la force V est dans un même plan avec Ox. on demontrerait de même

qu'elle doit se trouver dans un même plan avec Oy et Oz; donc V doit passer en O, — les deux forces U et V qui sont égales parallèles ~~et directement opposées~~ et de sens contraire, sont directement opposées puisqu'elles passent par le même point, — donc elles se font équilibre. —

3 forces qui se font équilibre sur un corps sont nécessairement dans un même plan — soient X, Y, Z trois forces appliquées aux points C, B, A. — on sait que les forces peuvent être ramenées à deux forces dont l'une passera en A, et l'autre en un point de AD, AD étant l'intersection des plans ABX et ACY. — puisqu'il y a équilibre les forces U, V doivent être égales contraires et dirigées suivant DA. — rappelons nous la compos. de la force appliq. en D; elle sera dirigée suivant DB et DC; comme la résultante est située dans un même plan avec ~~DB, DC~~ les composantes, il résulte que DA est dans un même plan avec DB, DC; mais DAB contient X; DAC contient Y; donc X et Y sont dans un même plan; maintenant la force Z doit être dans le plan des deux premières pour faire équilibre à leur résultante.



Ce théorème revient à celui ci; deux forces ne sauraient avoir de résultante unique si elles ne sont pas dans un même plan —; soit X et Y les deux forces, soit R leur résultante. si on applique en un point de la direct. de R une force égale et contraire à R, l'équilibre doit exister entre R', X, Y. donc les forces sont dans un même plan —; donc X, Y sont dans un même plan —

85 v

Lignes

Cours de Mécanique

Une machine est un système de corps solides destinés à transmettre l'action des forces. Ces corps ne sont pas libres : ils sont gênés ; il existe des obstacles qui ~~se~~ permettent d'équilibrer des forces qui sans cela ne pourraient pas se faire équilibre. Il est facile de comprendre l'action des obstacles ; supposons un corps pesant ; si on veut le soulever il faudra lui appliquer une force égale et contraire ; mais si on a un point fixe comme dans le levier, il suffira d'une force beaucoup moins considérable pour produire le même effet —

On appelle machine simple la machine ou chaque organe seul, obstacle — si l'obstacle est un point fixe on a un levier, — si l'obstacle est un axe fixe, on a un treuil etc —

La mach. ne sert utile qu'autant qu'elle doit le mouvement — ; il y a bien à distinguer 3 espèces de forces —

forces motrices ; ce sont celles dont on dispose, et qui doivent mettre la machine en mouvement ; ce qui caractérise ces forces, c'est que le chemin parcouru par le point d'applicat. fait un angle aigu avec la direct. de la force — x

résistances utiles ; ce sont les résistances que la machine a pour but de vaincre ; le point d'applicat. de ces résistances décrit un chemin faisant un angle obtus avec la direction de force ; il en résulte un travail appelé travail resistant. Ce travail résistant est négatif — . Ces résistances utiles sont par exemple la résistance du grain qu'on veut moudre, la cohésion d'un corps qu'on veut déformer etc —

x le travail de ces forces est positif ; on l'appelle travail moteur.

résistance positive. Ce sont des forces qui exigent du travail en pure perte; comme le frottement et la resistance du milieu, la raideur des cordes, le frottement de l'axe d'une poulie sur ses coussinets; il arrive encore que des efforts ~~[illegible]~~ de la machine sont animés d'un mouvement vibratoire, tout cela consomme du travail en pure perte.

Soit T_m le travail moteur total de la machine,
T_u le travail resistant utile
T_p le travail resistant positif
quand une machine fonctionne bien, elle s'arrange de telle sorte qu'elle ait un mouvement uniforme; alors toutes les forces appliquées à la machine doivent se faire equilibre; donc on a

$$T_m - T_u - T_p = 0.$$

ou tire de là $T_m = T_u + T_p$.

or T_p n'est jamais nul; donc une machine ne rend jamais autant de travail utile qu'elle en reçoit. la meilleure machine est celle qui perdent le moins de travail moteur. Le travail moteur est toujours plus grand que travail utile. — il y a toujours au moins 1/4 du travail moteur perdu.

× on a toujours $T_m > T_u$.

Les liaisons d'une machine sont telles, qu'elle ne peut prendre que deux mouv. autoriser, — de telle sorte que connaissant le mouvement d'un point, et le sens du mouvement on connaîtra le mouvement de tous les autres points. —

Donc il suffit d'une seule equat. pour déterminer le mouvement de la machine —. Cela a 1. la vitesse l'equat. des forces vives —; elle est $\Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2 = 2(T_m - T_u - T_p)$.

Si la machine est en repos, on a $\Sigma m V_0^2 = 0$, et comme le 1er membre est positif, on doit avoir $T_m > T_u + T_p$. Donc quand on machine se met en mouvement, le travail moteur doit être plus grand que la somme des résistances; ainsi le diff. moteur de la machine partout d'une vitesse nulle, et elle vient en augmentant jusqu'à ce qu'elle ait atteint un valeur maximum qu'elle ne dépasse plus; dès lors les forces motrices étant limitées et les résistances croissent; ainsi quand une roue est mise en mouvement par un cours d'eau, sa vitesse est nulle d'abord; elle va en augmentant mais elle ne dépasse pas la vitesse du cours d'eau; quand un cheval traîne une voiture, il ne pourra pas dépasser une certaine vitesse que est celle qu'il prendrait s'il était libre. Dans toute bonne machine on fait en sorte que le mouvement se maintienne aussi uniforme.

Dans toute bonne machine. Si on suppose la machine sans frot. et, le premier membre sera nul et l'on aura $T_m = T_u + T_p$.

Si dans une machine on supprimait le travail moteur on aurait $T_m = 0$; supposons que la machine marche à vide, c'est à dire qu'on n'ait pas à produire de travail utile, on aura aussi $T_u = 0$; il restera donc

$$\Sigma m v^2 = \Sigma m V_0^2 - 2 T_p$$

Mais à mesure que le temps croît, la résistance augmentant, il arrive un moment où $2 T_p = \Sigma m V_0^2$; après ce moment $\Sigma m v^2 = 0$; la machine s'arrêtera; ceci montre l'impossibilité du mouvement perpétuel —

Supposons une machine élevant un poids P à une hauteur h, le travail moteur est Ph. Le poids en redescendant restituera cette quantité de travail; mais il ne la restitue pas toute en effet utile; il y aura une certaine somme de travail perdu absorbé par les frottements; c'est ce qu'on veut dans la pompe hydraulique, dans la vielle hydraulique —

Le but que l'on se propose est de transformer ou transmettre le travail moteur — à l'aide au moyen des machines, d'utiliser le travail là où il est utile — . on n'a pas pour but d'augmenter le travail moteur, de produire de grands effets avec de petits moyens —

Une machine ne peut porter nourrir rigoureusement d'un mouv. uniforme — cela tient à deux causes; c'est que les moyennes, ne sont pas tout à fait constantes; ainsi que les resistances, — ; d'ailleurs de la que le mouv. de machine est périodique; la vitesse se reprend le même qu'après le même intervalle — = à la fin de chaque période, on a $v = v_0$, et a comment la $Tm - Tu - Tf = 0$; mais dans le cours de chaque période la vitesse varient, et celle dans un bon machine, il faut attendre à variations aussi que possible — on y parvient par l'influence des masses.

Soient m, m' m'' les masses des molecules — la somme des forces vives $= mv^2 + m'v'^2 \quad = (m + m' + \ldots) K^2 =$ *

* K est une moyenne entre les vitesses.—

Si M est grand, il n'y aura pas besoin que K varie beaucoup, pourque MK^2 varie; donc pour défendre à une variation inevitable dans ~~la vitesse de la machine~~ dans la somme des forces vives de la machine, plus la masse sera considérable, moins les vitesses varieront sensiblement

d'un autre part augmenter la masse de la machine c'est augmenter la dépense — . voyons la manière la plus avantageuse de ~~diminuer~~ rendre à cet inconvenient

Leçon

Cours de mécanique

Dans une machine il y a trois parties essentielles, — la partie à laquelle sont appliquées les forces motrices, celle à laquelle sont appliquées les résistances, et enfin celle qui établit un lien entre les deux premières.

Les mouvements de ces trois parties sont absolument différents; pour chacune d'eux Σmv^2 est une fonction périodique du temps. Si les trois parties existaient seules, la dérivée de Σmv^2 changerait de signe alternativement

Le volant est une sorte de pièce qu'on introduit dans la machine; c'est une roue de fonte mobile autour d'un axe horizontal, soit ω la vitesse angulaire du volant — La force vive du volant sera $\Sigma mr^2\omega^2 = \omega^2 \Sigma mr^2$. Pour que le volant ait plus d'effet possible pour la même masse, on met toute la masse du volant à la circonférence. En introduisant le volant dans la machine, désignons pour le volant Σmr^2 par μ; l'équation de force vive devienda

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = (T_m - T_u - T_f) - \frac{1}{2}\mu\omega^2.$$

d'où $T_u = (T_m - T_f - \frac{1}{2}\Sigma mv^2) - \frac{1}{2}\mu\omega^2$. — On pourra disposer de ω de façon que les variations du 2e membre soient très faibles, et par conséquent que T_u varie très peu; plus μ sera grand, plus il

sera facile d'atteindre cet état en faisant peu varier ω.

Quand deux corps se choquent il y a une perte de force vive égale à la somme des forces vives des vitesses perdues ; Dans les machines on a ~~un peu de latitude~~ les corps sont peu élastiques, chaque choc produit une perte notable de force vive — soit Σmu^2 une perte faite par un choc on aura après le choc

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \Sigma m - \Sigma u - \Sigma p - \frac{1}{2}\Sigma mu^2.$$

si donc on veut ramener la machine à son état primitif comme on ne peut disposer que du travail moteur, il faudra faire une dépense de force mouvantes capable de développer une force vive $= \frac{1}{2}\Sigma mu^2$; il faut donc éviter les chocs dans les machines —

Le choc de corps peut cependant être utilement employé dans certains cas — par ex. quand on veut enfoncer des pilots avec une mouton —, on obtient par le choc des effets qu'on n'obtiendrait pas par une pression permanente.

Supposons que le mouton pèse 300 K. et tombe de 1m,30 de haut ; supposons que le pilot s'enfonce de 2 centimètres ; de suite que le chemin parcouru par le mouton sera 1m,32.

Le travail sera $300 \times 1^m,32 = 396$ Kilogrammètres

Voyons quel poids il aurait fallu placer sur le pilot pour produire le même travail ; Le pilot devant s'enfoncer de $0^m,02$, on aura l'équation

$$x \times 0,02 = 396$$

d'où $R = 19800$ Kilogrammes; ceci montre bien que le choc est l'influence du choc;

Remarquons encore que le choc a produit cet enfoncement dans un temps très court. — En effet; on peut supposer que la résistance au mouvement est de 19300 Kil., tandis que dans le sens de la descente, on n'a qu'une force de 500 K.

L'équation du mouvement sera

$$\frac{300}{9,81}\varphi = 300 - 19800$$

$$\varphi = -\frac{19500 \times 9,81}{300}.$$

C'est un mouvement uniformément retardé! — En intégrant on a

$$v = v_0 + \varphi t$$

ici $v_0 = 5^m,05$ $5^m,05$ est la vitesse due à une hauteur de chute égale à $1^m,30$ — — La montre s'arrêtera quand la vitesse sera nulle; quand on aura $v=0$; soit θ le temps au bout duquel $v=0$ on aura.

$$0 = v_0 + \varphi\theta \quad \text{d'où } \theta = -\frac{v_0}{\varphi} = \frac{5^m,05}{19500 \times 9,81} = \frac{1''}{125}.$$

La montre ne met que $\frac{1}{125}$ de seconde à s'enfoncer.

Dans l'indication on enfonce le pieux, jusqu'à ce que 30 coups de mouton n'enfoncent plus que de 5 millimètres. On a reconnu qu'alors les pieux pouvaient être chargés de 25000 Kilogrammes sans aucun danger. —

Nous devons maintenant faire entrer la notion du temps dans l'idée du travail. Quand on s'occupe du travail des machines on doit se préoccuper non seulement de l'effet total de la machine, mais encore du temps employé pour le produire.

On appelle <u>cheval-vapeur</u>, le travail qui élève de 1 mètre de hauteur 75 Kilog. en 1'' — il ne faut pas confondre le cheval vapeur avec le cheval ordinaire — soit F l'effort moyen qu'un cheval ordinaire peut exercer

V la vitesse —

t le nombre d'heures qu'il peut travailler par jour

alors F V t donne l'effet utile produit par le cheval dans une journée. — L'expérience a montré que ces 3 éléments ne doivent pas dépasser certaines limites; pour chaque mode d'emploi du cheval, ce produit est susceptible d'une maximum qu'il ne faut pas dépasser. — Voici quelques nombres trouvés par l'expérience —

× à égalité de fatigue

	effort moyen	vitesse par 1''	travail par 1''	durée du travail journalier	travail total
Cheval au pas attaché à une voiture.	70 kilos	0,90	63 K.mètr.	10h	2268000 Km
Cheval au trot à une voiture.	44	2,20	96,8	4h,5	1568160
Cheval au manège au pas	45	0,90	40,5	8.	1166400
Au trot.	30	2,20			

On peut comparer le cheval vapeur au cheval réel —; le cheval vapeur représente un travail de 75 par 1'' et travail 24h. donc ce produit un travail = 75 Km × 24×36

l'effort au travail du cheval au manège sera $\frac{75 \times 24 \times 3600}{40,5 \times 8 \times 3600} = 5$

Regnier.

Cours de Mécanique

Le travail de l'homme peut être utilisé de bien des manières différentes. — par exemple pour élever des fardeaux, on peut le supposer placé dans un plateau, et élevant un poids égal au sien au moyen d'une poulie. Ce moyen a été reconnu comme le plus avantageux. Dans les terrassements du fort de Vincennes, un homme a pris par jour chacun 70 Kil, 310 fois à la hauteur de 13 m. — Le travail total est de 282200 Kilomètres = 13×70×310.

Un ouvrier faisant mouvoir une manivelle ne peut exercer qu'un effort moyen de 8 K. Sa main parcourt 0,75 par seconde, et l'extrémité du rayon égal à 0,35 — il peut travailler 8 heures par jour. Son travail par seconde est 6 Kilomètres. Son travail total sera 172800 Kilomètres —

Le travail le plus déplorable est le travail à la pelle — Un ouvrier élevant de la terre à 1m,60, le poids élevé étant 2K,5, le chemin parcouru étant 0,40 —, le travail journ 10h; le travail total sera 26800 —

Dans un tour à cheville, le travail de l'homme est assez avantageux; l'homme peut exercer un effort moyen de 60 Kilomètres —

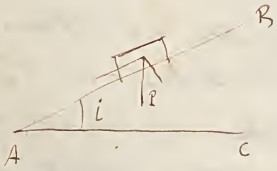
3

Loi du frottement.

Les corps les moins polis présentent à leur surface des aspérités, et lorsque elles sont en contact, elles s'engrènent les unes dans les autres. — Indépendamment de cet engrènement, il y a un rapprochement en vertu duquel le plus petit corps s'emboîte dans le plus grand. — L'engrènement moléculaire et l'emboîtement de deux corps font naître des résistances tangentielles qu'on nomme frottement.

Il y a deux espèces de frottement, ~~le frottement~~ de glissement. Le frottement rectiligne comme celui d'un traîneau; le frottement curviligne tel que le frottement des axes dans les coussinets.

Amontons en 1699 avait cherché à établir la loi du frottement. — Supp. un corps pesant placé sur un plan incliné AB, lequel plan est mobile autour d'une charnière, de telle sorte que l'angle BAC peut varier. — Le poids du corps peut se décomposer en deux autres; l'une ~~normale~~ PG, I normale à AB, l'autre P H i parallèle à AB — . L'expérience prouve que le corps se maintient en équilibre sur le plan, tant que l'angle i n'a pas atteint une certaine limite. cet angle limite est ce qu'on appelle l'angle de frottement. — Soit f le rapport du frottement à la pression normale — le frottement aura pour expression f × PG. i ; tant que on aura f PG. I > P H. i, le corps restera en repos; soit λ l'angle d'inclinaison

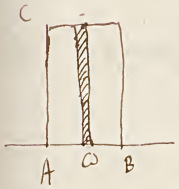


Cependant au moment où l'équilibre va se rompre, à ce moment là on aura

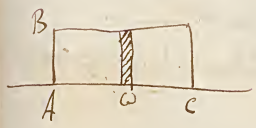
$$P \sin\lambda = f \cdot P \cos\lambda. \quad \text{d'où}$$

$$\operatorname{tg}\lambda = f.$$

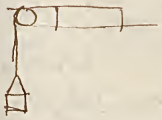
L'expérience pourra donner λ pour chaque cas; on pourra donc ainsi avoir la valeur du frottement au moment de départ. Amontons avait reconnu que l'angle λ est le même quelque soit la charge du corps. Donc, toutes choses égales d'ailleurs, le frottement est proportionnel à la pression. On avait encore reconnu par le même mode d'expérience que le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces frottantes. Ceci n'a rien d'paradoxal. Supposons un corps prismatique placé sur sa plus petite face: le frottement sur chaque élément ω ne dépendra que du poids du petit prisme qui est au dessus de ω. Le frottement total sera $(\omega + \omega' + \ldots)\, AC = AB \times \text{surf.}\, AB$. —



Si on retourne le corps sur sa plus grande face, le prisme pesant sur chaque élément est moins lourd; le frottement total est $AB \times \text{surf.}\, AC$; c'est toujours le même produit. — Amontons avait donné du nombre bien grand.



L'expérience de Coulomb a été faite à Rochefort en 1781. — Il avait un banc horizontal sur lequel glissait un traîneau, qu'on pouvait charger de poids. Un câble attaché au traîneau passant sur une poulie, et soutenant un plateau chargé de poids, descendait dans un puits de 4 pieds de profondeur; il pouvait faire varier la surface frottante, — pour cela il pouvait clouer sur le banc deux règles longitudinales de la



matière qu'il voulait étudier, et il clouait sur le tronc deux regles de même nature — il pouvait faire varier l'étendue de surface frottante, en clouant sur le tronc des prismes arrondis —

Voici des nombres obtenus en faisant frotter 3 pieds carrés de chêne contre chêne —

Le tronc pesait 74 lbs, il en fallait que le plateau en pesât 30 pour que le mouvement fût le produire ; le rapport du frottement à la pression est $f = \frac{30}{74} = 0,40$ —

2e expérience —

le tronc pesait 874 lb — le plateau pesait 406 lbs

le rapport est $f = \frac{406}{874} = 0,46$ —

3e expérience —

le tronc pesait 2474 — le plateau pesait 1116

le rapport $f = \frac{1116}{2474} = 0,45$

ainsi le rapport est sensiblement constant ; donc le frottement est proportionnel à la pression —

en faisant varier l'étendue de surface frottante voici les nouveaux nombres obtenus —

Tronc	Plateau	rapport
250 —	106 —	$\frac{106}{250} = 0,42$
450 —	186 —	$\frac{186}{450} = 0,41$
856 —	356 —	$\frac{356}{856} = 0,41$

ainsi le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces frottantes. — Coulomb a reconnu que ce n'est qu'après un certain temps que le frottement a obtenu sa plus grande valeur, bois sur bois il faut plusieurs jours. pour les métaux très durs, le frottement prend sa valeur immédiatement. Coulomb a trouvé que le frottement était plus considérable suivant l'fil du bois qu'en travers. — les enduits diminuent les frottements, en glissant dans les pores, et rendant l'engrenage moins considérable — —

Ligner

Cours de Mécanique.

pour étudier le frottement à l'état de mouvement après avoir chargé le traîneau, il changeait le plateau pour que le traîneau fut emporté! — il observait le temps mis par le traîneau à parcourir les deux derniers 1 pieds et celui employé pour parcourir les deux derniers 1 pieds et celui employé pour parcourir ce temps il observait au moyen d'un pendule qui battait la demi-seconde — si le mouv. était uniformément accéléré, on aurait

(x) Le chemin total parcouru était de 4 pieds.

$$e = \frac{1}{2} g t^2$$

et en désignant par $t+t'$ le temps nécess. pour parcourir un espace double, on aura

$$2e = \frac{1}{2} g (t+t')^2.$$

d'où

$$\left(\frac{t+t'}{t}\right)^2 = 2$$

d'où

$$t^2 = \frac{t'}{\sqrt{2}-1} = t'(\sqrt{2}+1)$$

$$t = t' \times 2,41 \text{ environ.}$$

ainsi si le mouv. était unif. accéléré, on devait avoir cette relation entre t et t'. Coulomb attribuait cela au frottement : il y avait cependant de causes d'erreur ; ainsi l'unité de temps que était obligé observer était comparable aux demi-secondes pendant lesquelles se faisait l'expérience. (*) Ensuite le traîneau ne parcourait qu'un très petit espace ; le frottement est plus grand au moment du départ que pendant le mouvement. le traîneau passait de la valeur maximum qu'il a au moment du départ, à la valeur minimum qu'il doit avoir pendant le mouvement. De suite qu'il y avait de très grandes irrégularités, et le temps de l'expérience n'était pas assez considérable, aussi Coulomb aussitôt devait la loi qu'il en a démontrée —

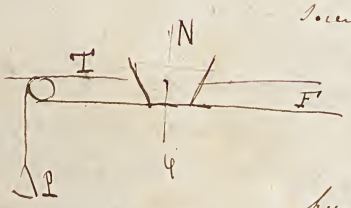
(*) Car le temps total était en général $\frac{10''}{2}$; $\frac{12''}{2}$; or une seconde — $\frac{1''}{2}$ ou avec du frottement le nombre était très considérable.

Voici le résultat obtenu par Coulomb —

tronc.	plateau	t	t'
74	14	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$
874	105	$\frac{6}{2}$	$\frac{3}{2}$
2474	270	$\frac{8}{2}$	$\frac{5}{2}$

Les rapports sont loin de satisfaire à la loi trouvée.
Voici des expériences plus concluantes. —
Voici des nombres $t = \frac{3}{2}$. $t' = 1$
$t = \frac{8}{2}$ $t' = \frac{3}{2}$
il y a encore de grande irregularité — Coulomb a plutôt deviné la loi que la démontrée —

On admet que le mouv. était unif. accéléré, il en résultait que le ~~mouvem~~ frottement était constant. —



Soient P le poids du plateau —
T la tension du cordon.
q. le poids du plateau
F le frottement
N la réaction normale du plan —

puisque les tronc. molecul. du cordon sont droits égaux et parallèles pendant chaque instant, soit q la force qui applique à chaque molecule lui donnant le mouvement qu'elle a réell; d'où résulte que mq sera la force motrice d'cette molecul. Cette force sera constante d'intensité et de direction; elle sera même chose pour les autres molecul, appliqué à chaque molecul de fils mq - mq m'q - m'q que se détruisent sur chaque molecule.
Mais les forces ~~motr~~ mq, m'q donnent encore le ~~mouvement~~ en établissant la liaison du système. Dans ce point que les forces - mq - m'q se détruisent avec les

autres forces, que sollicitent le traineau — ces forces sont:

$P, T, \varphi, F, N.$ —

ces forces doivent se détruire comme si le corps était libre. — ~~la somme des composantes parallèles au plan devra être nulle.~~ la force $-m\varphi - m'\varphi$ se composant en une seule appliquée au centre de gravité et égale à $-M\varphi$. — la somme des compos. parallèles au plan devra être nulle; mais φ et N ne donnent rien dans cette somme

$$T = F + M\varphi.$$

ou

$$T - F = M\varphi.$$

Mais $M = \frac{Q}{g}$ $\quad \varphi = \frac{2e}{t^2}$.

$$T - F = \frac{Q}{g} \times \frac{2e}{t^2}$$

si maint. on considère le mouv. du plateau, la force qui détermine son mouvement est $P - T$, et on a

$$P - T = \frac{P}{g} \times \frac{2e}{t^2}.$$

Car le mouv. du plateau est le même que celui du traineau — au moy. de Q dans ce cas, on peut éliminer T. il vient

$$F = P - \frac{P+Q}{g} \times \frac{2e}{t^2}$$

il résulte de là que le frottement est constant et indépendant de la vitesse. —

la force $-M\varphi$ est appliquée au centre de gravité. P est appliqué au centre de gravité; ces deux forces se composent en une seule; maintenant ~~la force N et F~~ pour chaque point la réaction du plan sur chaque molécule

du plateau

L'expérience a été répétée par M. Morin. — On ~~entoura~~ attacha la corde à la lame antérieure d'un dynamomètre portant un pinceau imbibé d'encre : ce stylet était vertical et pouvait laisser une trace sur un plateau circulaire recouvert de papier et placé au dessous du dynam. — Ce plateau était suspendu à un traîneau, et il tournait sur lui d'une quelle façon. au chemin parcouru par le traîneau, et pour rétablir le mouvement l'axe du disque portait une gorge sur laquelle s'enroulait une corde tendue aux deux bouts du banc. Le traîneau poussant le disque devant lui, le disque tournait proportionnellement au chemin parcouru

Soit ~~M~~ le point du plateau qui est en regard du stylet chaque point de la circonférence Om se présentera successivement à la pointe du dynamomètre rétrograde, en avant un cercle parfait ; mais si la pointe change, au lieu du cercle on aura une courbe comme la figure. — ; entraînant le cercle d'avant et en reculant si le pinceau s'écartait plus ou moins — ; or ~~la pointe~~ l'expérience montre que la tension de la corde est constante pendant le mouvement ; il en résulte que le frottement est indép. de la vitesse ; la force qui ~~répond non à l'équation~~ détermine le mouv. du plateau est $P - T$; c'est une force constante ; donc le mouvement du plateau est uniformément accéléré, et puisque le mouv. du traîneau est uniformément accéléré.

Pignier

Cours de Mécanique

on a donc $T - F' = \frac{Q}{g} \cdot \frac{2e}{t^2}$.

d'où $F' = T - \frac{Q}{g} \cdot \frac{2e}{t^2}$.

Il restait donc à déterminer le rapport $\frac{2e}{t^2}$. —
M. Morin a trouvé ce rapport indépendant de ce que précède;
ce sera un vérification.

La poulie de renvoi sur laquelle passe la corde portant
le plateau mobile, que décrit D, a un prolongt. au chemin par comme
le regard de ce plateau se trouve un Style, indépendant
du plateau; ce Style se meut par le moyen d'horlogerie
qui lui communique un mouv. uniforme de rotation.
Supposons que le plateau ~~se marche~~ de la poulie ne
marche pas; alors le Style décrira sur le plateau un cercle
comme à la ~~poulie~~ figure; supposons que le Style
décrive une circonférence en 1",8 —; divis. le cercle en 10 parties
égales AB, BC — etc.; chaque partie sera parcourue
en 0",18 —, puisque le cercle entier est décrit en 1",8.

Mais en même temps le plateau de la poulie tourne; le Style
décrira une courbe ondulée que sera AmE par exemple.
De suite que si un point OB, O étant le centre du plateau,
si de O comme centre ou OB pour rayon, on décrit un arc
qui coupera la courbe AmE au point m, le point B
aura été reporté en m. — le plateau a donc tourné de
l'angle BOm. or cet angle BOm pouvait être

relevé au ~~graduateur~~ rapporteur) dans une expérience il trouva que BOm = 6°, 5; la poulie a donc tourné de 6°, 5 pendant 0", 18 — ; de cette manière on avait le temps à $\frac{1}{100}$ près ; on voit que la précision était beaucoup plus grande que dans l'expérience de Coulomb. —

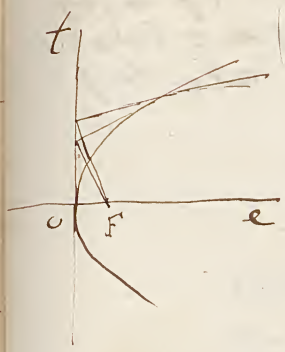
Cet angle BOm pouvant être relevé au rapporteur — cet angle BOm était dans une expérience 6° 30' — la poulie de renvoi a donc tourné de 6°, 30' — ; soit r le rayon de la poulie, le chemin décrit par le cadre ou par le traîneau sera $\frac{\pi r}{180} \times 6°, 5$ — ; c'est la quantité dont un point de la courbe a décrit ; on a donc ainsi le temps et l'espace, les deux éléments de la question. —

Tableau sur deux colonnes —

Partie de la circonférence du style —	temps	degrés parcourus par le pendule	espaces parcourus par le traîneau
0, 0	0	0	0
0, 1	0", 18	6°, 5	0m, 012
0, 2	0", 36	20 5	0m, 040.
0, 3	0", 54	45°	0, 089
0, 4.	0", 72	78°, 5	0, 142
0, 5	0, 90	120, 5	0, 233
0, 6 —	1", 08	158,	—

la 2e colonne et la 3e donnent le temps et les espaces. —

d'après cela on pouvait construire la courbe des espaces en prenant — le temps pour ordonnée et les espaces pour abscisse — ; il a reconnu que cette courbe était une parabole — voici le moyen employé par M. Morin



il menait des tangentes à la courbe jusqu'à la rencontre de l'axe OF : ensuite du point d'où il a les tangentes, les tangentes venaient concourir en un même point qui était le foyer de la parabole ; et cette construction lui permettait de faire une correction — ; quelquefois le point F' tombait un peu au dessus de l'axe Oe ; ceci montrait que le temps étaient tous trop grands d'une quantité constante, les temps évalués étaient tous trop grands d'une même quantité provenant de ce que le plateau ne se mettait pas en mouvement immédiatement à l'origine du temps. — ×

alors il fallait faire passer par le point F' ; de cette manière l'origine du temps était bien déterminée. au lieu de la parabole $t^2 = 2pe$, on avait l'eq. $t^2 = 2pe$.

Supposons donc l'origine et l'axe de la parabole bien fixés ; nous avons la relation.

$$F' = T - \frac{Q}{g}\frac{2e}{t^2}.$$

dans cette equat. tout est connu ; T est donné par le dynamometre ; et $\frac{2e}{t^2}$ est l'inverse du parametre de la parabole — ; soit p le parametre ; on a $\frac{2e}{t^2} = \frac{1}{p}$ p peut être mesuré ; c'est l'ordonnée du foyer ; donc

$$F' = T - \frac{Q}{gp} ; —$$

résultats numeriques —

chaque sur chaque sans endent —

$Q = 1039^{k},03$

$T = 528^{k},19.$

$\frac{1}{p} = 0,361.$

d'après cela

$$F' = 528,19 - \frac{1039,03 \times 0,361}{9,8088} = 489^{k},95$$

du rapp. de poids. de la pression $= \frac{F'}{Q} = 0,471$ pendant toute la durée du mouvement

X depuis 40 K. jusqu'à 2800.

Les expériences ont été faites sur la plupart des corps employés dans les machines, en faisant varier l'étendue des surfaces frottantes, la charge et le mouvement au départ et après un certain temps de repos.

Surfaces	sec	mouillés d'eau	huile	saindoux	suif	savon
bois sur bois	0,50	0,68		0,21	0,19	0,36.
bois sur métal	0,60	0,65	0,10	0,12	—	
Cordages sur bois	0,63	0,87				
métaux sur métaux	0,18		0,12	0,10	0,11	

Ces nombres sont les valeurs du coefficient $f = \frac{F}{Q}$.
C'est des valeurs moyennes — —.

3

Frottement pendant le mouvement —

Surfaces	sec	mouillés d'eau.	huile	saindoux	suif
bois sur bois	0,36	0,25		0,07.	—
bois sur métal	0,42	0,24	0,06	0,07.	0,08
métal sur métal	0,18		0,07.	0,09	

Coulomb a déjà fait les essais étudiés par M. Morin, il a trouvé du nombre un peu plus grand que M. Morin — le frottement est proportionnel à la pression —, il est indépendant de l'étendue des surfaces frottantes — et de la vitesse pendant le mouvement. — Le frottement est plus grand au départ qu'pendant le mouvement.

17

Lignier

Cours de Mecanique —

Frottement de glissement circulaire

La loi du frottement du tourillon d'un cylindre sur les coussinets qui le soutiennent ainsi que la du frottement de l'axe de poulie ont été etudiés par Coulomb —

Coulomb avait pris une poulie embrassée par une corde, soutenant deux poids.—

Supposons d'abord deux poids égaux P: la poulie portait un axe qui roulait dans une boîte de cuivre. Le système était soutenu par des traverses de bois; si alors CD maintenant il y aura frottement de la boîte de la poulie sur l'axe; si au contraire CD est fixe à la poulie, il y aura frottement de CD sur les coussinets qui supportent l'axe de la poulie —

Projet. horizontale

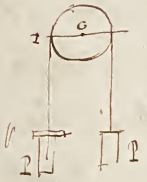
Pour determiner le mouvement du système, ajoutait un petit poids additionnel —; il observait le temps necessaire pour parcourir les 3 premiers pieds, et celui necessaire pour parcourir les 3 derniers — il trouvait que le rapport du temps était $\sqrt{2}+1$, d'où le mouvement était uniformément accéléré.—

Or une partie du poids p était dépensée pour vaincre le frottement; donc ce poids p devait être plus grand que celui necessaire pour donner au système le même mouvement, en supposant le ~~mouvem~~ frottement détruit —

Supposons d'abord qu'il n'y ait pas de frottement. Soit Q le poids de la poulie, $\frac{Q}{g}$ sera la masse, $\frac{Q}{g}K^2$ le moment d'inertie, le mouvement de la poulie sera déterminé par l'équation

$$\left\{ QK^2 + (2P+p_1)c^2 \right\} \frac{d\omega}{dt} = p_1 g c.$$

c étant le rayon de la poulie, et p_1 étant le poids qu'il faudrait mettre pour déterminer le mouvement du système; d'où $\omega = \frac{p_1 g c t}{QK^2 + (2P+p_1)}$; sans constante p_1 a supposé la poulie partant du repos. —



Soit x la distance du poids p au plan horizontal qui passe par le centre de la poulie; on aura pour la vitesse du point I

$$\frac{dx}{dt} = c\omega$$

d'où $$dx = c\omega\, dt = \frac{p_1 g c^2 t\, dt}{QK^2 + (2P+p_1)c^2}.$$

Intégr. de $x=0$ à $x=h$ il vient

$$h = \frac{p_1 g c T^2}{2\left(QK^2 + (2P+p_1)c^2\right)}$$; T étant le temps pour le poids descendre d'une hauteur h.

De cette équat. on peut tirer la valeur de p_1

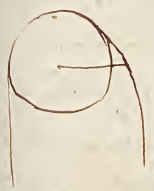
$$p_1 = \frac{2h\left[QK^2 + 2Pc^2\right]}{gc^2T^2 - 2hc^2}$$

p_1 est le poids qu'il faudrait pour déterminer un mouvement assigné d'avance sans frottement

Mais Coulomb connaissait p que donnait en tenant compte de toutes les fois le même mouvement que précédemment. par conséquent $p-p_1$ sera la force dépensée par le frottement, et la raideur de la corde ; Coulomb connaissant h, T. $(p-p_1)$ était donc connu ; seulement il faut remarquer que cette force $(p-p_1)$ est appliquée au bras de levier CI ; et comme c'est le frottement de l'axe dans la boîte que nous cherchons, il faut voir ce que devient cette force quand on la suppose appliquée au bras de levier de l'axe. —

Le diamètre de la poulie égal à 144 lignes
Le diamètre de la boîte était de 20 lignes 3/4 ; —. la force $p-p_1$ réduite au bras de levier de la boîte sera $\frac{(p-p_1)144}{20+3/4}$. Ce nombre représente par l'effet du seul frottement ; il dépend aussi de la force perdue par la raideur de la corde. — —.

dépend aussi pour une partie de force due à la raideur de la corde — L'expérience montre que si une corde s'enroulant sur une poulie est tirée par deux forces verticales, lorsque de la détacher verticalement suivant la tangente, la corde s'écarte de la tang. verticale du côté de la résistance ce qui augmente le bras de levier de la résistance au détriment de la ~~résistance~~ puissance. L'expérience directe a servi à Coulomb à tenir compte du poids capable de plier la corde. Voici ses résultats
$P = 400$ liv. $p = 28$ $T = 8''$ $h = 6$ pieds $\varphi = 14$ liv.
$p_1 = 5\frac{1}{2}$; alors $p-p_1 = 22$ liv. 8, représente le frottement et la raideur de la corde —



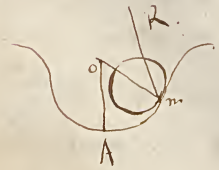
pour avoir le frottement du axe il faut retrancher de ce nombre la perte de poids due à la raideur de la corde. Cette perte était 800 livres en totalité 19 livres était la perte due au frottement, le charge supportée par l'axe est $800+28+16 = 842$, alors

$$\frac{19\times 16}{20,75\times 842} = \frac{1}{6}$$

est le rapport du frottement à la pression. Ces expériences étaient faites sans enduit. — Avec enduit de suif, le rapport est tombé à $\frac{1}{26}$. —

En résumé la loi du frottement de glissement est vérifiée exactement pour le frottement de glissement curviligne; seulement le rapport du frottement à la pression est très faible; ce qui montre que dans les expériences de M. Morin on pouvait négliger le frottement du axe de la poulie de renvoi; ce frottement étant très faible relativement au frottement du traîneau.

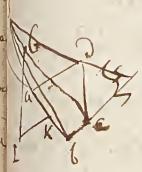
Dans le cabestan le treuil a employé deux cuves, on laissait un peu de jeu dans la boîte, ensuite quelle partie de l'axe peut occuper plusieurs positions. — Considérons un solide pesant en forme de tourillon. Au départ le contact est en A le point le plus bas; mais quand le mouvement commence, l'axe s'élève en roulant comme sur une série de plans inclinés qui seraient les plans tangents au cylindre, jusqu'à ce que le point de contact soit arrivé en un certain point M, tel que si on mène la normale ~~en~~ MO au contact, et la réaction MR, l'angle MOR soit précisément égal à l'angle de frottement; le tourillon alors cesserait de monter, l'angle de frottement cesserait de monter, et le tourillon retomberait. La machine prendrait un mouvement uniforme dans cette position, et l'angle MOA serait constant



Leguier

Cours de Mecanique —

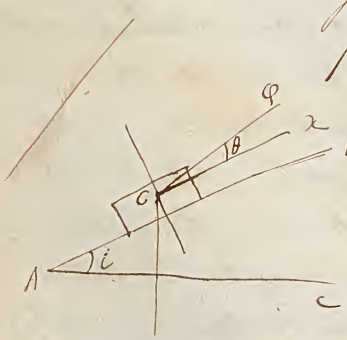
Supposons un corps pesant placé sur un plan horizontal; il n'y a pas de force active autre que la pesanteur, l'expérience montre que ce corps reste en repos sans avoir de mouvement de rotation, pourvu que la verticale passant par le centre de gravité passe dans l'intérieur du polygone d'appui; et les réactions du plan peuvent se décomposer chacune en deux; une force normale, et une force tangentielle; les forces normales se composent en une seule égalant le poids du corps; les réactions tangentielles se détruisent entr'elles. —



Supposons que la verticale du centre de gravité passe en dehors du polygone d'appui. L'expérience montre que le corps fait la bascule autour d'une arête ab: dans ce mouvement on peut supposer que le mouvement ~~fournit~~ se fait autour d'un axe. Le moment du poids P sera P×IK; I est le point où la verticale du centre de gravité rencontre le plan de la base; IK est une perpendiculaire abaissée de I sur ab. Si on voulait retenir le corps, il faudrait lui appliquer des forces dont la somme des moments fut égale à P×IK. Si au contraire la verticale passe dans l'intérieur du polygone d'appui, il faudrait détruire le moment P×IK pour faire basculer le corps autour de l'arête ab. Ce moment est appelé moment de stabilité du corps; plus ce moment sera grand, plus les forces nécessaires pour le faire basculer devront être considérables. — Le moment de stabilité dépend de l'arête que l'on considère. Il existe celle d'arête pour laquelle le moment est minimum; c'est ce moment là qui est le moment de stabilité. —

Ca. on le plan est incliné à l'horizon, — supposons un corps placé sur ce plan, et ~~retenu par~~ sollicité par une force Q. — quelle condition doivent être remplies pour que le mouvement soit uniforme ?. en chaque point d'appui du corps contre le plan, il y a une réaction oblique, ces réactions obliques sont parallèles; elles donnent lieu à une résultante unique; il doit donc y avoir équilibre entre la force P, Q, et la réact. du plan; donc ces trois forces doivent être ~~égales~~ dans une même plane, et l'une d'elles égale et opposée à la résultante des deux autres. —

La force Q doit rencontrer la verticale P. Supp. que le plan BAC soit le plan qui contient la ligne de plus grande pente, et que la force Q soit contenue dans ce plan. — par le point C mener Cx parallèle à AB. soit $\theta = QCx$. on regarde θ comme positif quand il sera compté au dessus de Cx; négatif quand il sera compté au dessous. la force Q se décomposera en deux. $Q\cos\theta$, $Q\sin\theta$ la force P en deux. $P\sin i$ $P\cos i$ la pression normale est $P\cos i - Q\sin\theta$.



le frottement sera $f(P\cos i - Q\sin\theta)$: —
si le corps est prêt à remonter on aura

$$Q\cos\theta - P\sin i = f(P\cos i - Q\sin\theta)$$

c'est l'équation d'équilibre — si le corps était au moment de descendre, il faudrait changer le signe de f

on tire de la $Q = \frac{P \sin i + P f \cos i}{\cos \theta + f \sin \theta}$.

Soit α l'angle de frottement pour le cas de contact; on aura $Q = \frac{P \sin(\alpha + i)}{\cos(\theta - \alpha)}$

Cette équation a lieu dans le mouvement uniforme en remontant. — Cette equat. convient au moment de l'equilibre vers rompre; il faut remarquer que si le cas est en mouvement, $f = \tang \alpha$, puisque le frottement pendant le mouv. est moindre que au moment du départ; alors il faudrait mettre à la place de f, la valeur d'f observée quand le cas. est en mouvement. —

Si $\alpha = 0$, le frottement est nulle; on a $Q = \frac{P \sin i}{\cos \theta}$. C'est la formule de Statique.

revenons à la formule; si on demande la direction de Q la plus favorable, il faut chercher la valeur de θ pour laquelle Q soit minimum, ou le $\cos(\theta - \alpha)$ maximum; ce que donne $\theta = \alpha$.

Si le cas était prêt de se rendre il faudrait faire $\theta = -\alpha$

Si on donne la grandeur de Q, on peut se proposer de trouver θ. θ sera donné par un cosinus; à le cosinus répondent deux arcs égaux et de signe contraire; on aura $\theta - \alpha = \pm m$; d'où $\theta = \alpha \pm m$. Ceci montre qu'il y a deux directions suivant lesquelles on peut retenir le cas. — Nous venons de trouver la force qui correspond au mouvement de remonte; pour avoir celle qui correspond au mouvement de descente il faut changer le signe de f ou de α; soit Q' cette force; on aura

$$Q' = \frac{P \sin(i-\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}$$

d'où $$\frac{Q'}{Q} = \frac{\sin(i-\alpha)\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)\sin(i+\alpha)}.$$

Suppos. que les forces soient parallèles au plan incliné, on a alors $\theta = 0$ et $\frac{Q'}{Q} = \frac{\sin(i-\alpha)}{\sin(i+\alpha)}$, par suite $Q' < Q$.

Si $i = \alpha$, $Q' = 0$ Ceci veut dire qu'il y a équilibre entre le frottement et la composante parallèle du poids sur l'intersection du 3e plan —

Si $i < \alpha$, la force Q' passe de l'autre côté de la verticale, l'angle qu'elle fait avec le plan, au lieu d'être θ est $\theta + \alpha$

Quel est le travail perdu par le frottement, prenons le cas de remonter — soit ε le chemin parcouru par le corps. Le travail résistant utile sera $P\varepsilon \sin i$; le travail du frottement est $f(P\cos i - Q'\sin\theta)\varepsilon$.

remplace Q par sa valeur on a

$$\frac{P\varepsilon f\left(\cos i \cos(\theta-\alpha) - \sin\theta \sin(i+\alpha)\right)}{\cos(\theta-\alpha)} = T_f$$

C'est le travail perdu. en simplifiant il vient

$$T_f = \frac{P\varepsilon \sin\alpha \cos(i+\theta)}{\cos(\theta-\alpha)}.$$

Le rapport du travail perdu au travail utile est

$$\frac{T_f}{T_u} = \frac{\sin\alpha \cos(i+\theta)}{\cos(\theta-\alpha)\sin i}$$

C'est facile de voir dans quel cas cette fraction est $<$ ou > 1, dans le cas où $\alpha \leqq i$ autrement quelle fraction est < 1, mais pour des valeurs de α plus grandes cette fraction est > 1. —

Suppos. un traineau lancé sur la glace, connaît le poids du traineau, et on observe l'espace e parcouru. on peut mesurer le temps t du mouvement. Cela suffit pour.

Car soit φ l'accélération, P le poids du traineau; soit V_0 la vitesse initiale.

on aura $V = V_0 + \varphi t$.

et $E = V_0 t + \frac{1}{2}\varphi t^2$.

Mais la force motrice qui produisait le mouv. effectif est $\frac{P}{g}\varphi$; cette force est égale ici à la force de frottement ~~fP~~ on a $\frac{P}{g}\varphi = -fP$; c'est l'équat. que nous avons précédemment —

$$V = V_0 - fgt.$$

$$E = V_0 t - \frac{1}{2}fgt^2.$$

le traineau s'arrête au bout d'un temps T; à ce moment $V=0$ d'où $T = \frac{V_0}{fg}$; éliminons V_0 qui est inconnue il vient $E = \frac{1}{2}fgT$.

d'où $f = \frac{2E}{gT^2}$.

Si au lieu de α, φ devait rester négatif, ce mouvement dans quelque mouv. serait uniformément retardé.

Soit v_0 la vitesse initiale que le ressort imprime au corps : au bout du temps t on aura

$$v = v_0 + \varphi t = v_0 + \frac{g \sin(1-\alpha)}{\cos\alpha} \cdot t$$

$$E = v_0 t + \frac{1}{2}\varphi t^2 = t\left(\frac{v_0 + v_0 + \varphi t}{2}\right)$$

$$= \frac{t(v+v_0)}{2}$$

Mais $t = \frac{v - v_0}{\varphi}$. donc

$$E = \frac{v^2 - v_0^2}{2\varphi}.$$

Multiplions les deux rots par M devant.

$$2M\varphi . E = M(v^2 - v_0^2).$$

Donc l'accroissement de force vive en passant d'une position à une autre est égale au double du travail produit. —

Car d'un corps abandonné à lui-même. Ce corps glissera sur le plan — la molécule devient du droit égal de corps P en deux forces — $P\cos i$ normale, et $P\sin i$ — le frottement est $fP\cos i$; il agit en sens inverse du mouvement. — on a vu que q représente l'accélération, M la masse du corps, si on applique à chaque molécule une force égale ~~et on~~ contraire à celle qui lui

do

il y aura équilibre entre ces forces là et les forces appliquées. Comme le corps est une seule Mq appliquée au centre de gravité du corps; donc il doit y avoir à chaque instant entre Mq, P, et R; R est la réaction du plan; la somme des projections sur AB sera nulle; donc on aura

$$Mq + fP\cos i - P\sin i = 0.$$

d'où $$q = \frac{P(\sin i - f\cos i)}{M}$$

$$q = g(\sin i - f\cos i) \quad \text{car } P = \frac{M}{g}.$$

$$q = \frac{g\sin(i-\alpha)}{\cos\alpha} \qquad \text{en posant } f = \operatorname{tg}\alpha.$$

le mouv. ne sera jamais uniforme à moins qu'il n'ait $i = \alpha$. Sans cela le mouv. sera uniformément accéléré; ceci justifie l'expérience de Galilée.

BIBLIOTHÈQUE NATIONALE SUPERIEURE

Nous avons trouvé la formule

$$(1) \quad \Phi = \frac{P \sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta-\alpha)}$$

Soit ε le chemin décrit par le corps pesant en montant. — le travail moteur est $\Phi \varepsilon \cos\theta$. — le travail utile est $P \varepsilon \sin i$ —

multipl. (1) par $\varepsilon \cos\theta$, il viendra

$$\Phi \varepsilon \cos\theta = P \varepsilon \sin i \frac{\sin(\theta+\alpha)\cos\theta}{\sin i \cos(\theta-\alpha)}$$

$$= P \varepsilon \sin i \left\{ 1 + \frac{\sin\alpha \cos(\theta+\theta)}{\sin i \cos(\theta-\alpha)} \right\}$$

soit T_u —

ou bien de la

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{1}{1 + \frac{\sin\alpha \cos(\theta+\theta)}{\sin i \cos(\theta-\alpha)}}$$

Ce rapport est toujours < 1, ce qu'on savait. C'est ce qu'on appelle le rendement d'une machine; une machine est d'autant meilleure que ce rapport approche plus de 1 —

Considérons maintenant une poulie ; il faudra supposer $R = r$; supp. de plus que les direction P et φ soient verticales - il viendra

$$P = \varphi + \frac{\rho \sin\alpha}{}$$

on déduit de là la valeur P.

$$P = \frac{\varphi(r + \rho \sin\alpha) + V\rho \sin\alpha}{r - \rho \sin\alpha}$$

c'est la valeur de P dans le mouv. uniforme — on peut écrire

$$P = \varphi\left(1 + \frac{2\rho \sin\alpha}{r - \rho \sin\alpha}\right) + V\rho \sin\alpha.$$

$$P = \varphi + \frac{\varphi\rho \sin\alpha\left(2 + \frac{V}{g}\right)}{}$$

Soit ε le chemin décrit par un point de la circonférence de la poulie ; en multipl. les deux mem. par ε.

il vient $P\varepsilon =$ -

d'où $\frac{\Phi\varepsilon}{P\varepsilon} = \frac{1}{}$

La perte occasionnée par le poids de poulie est peu considérable ; en voici la preuve —

102 v

Boucle mobile —

103v

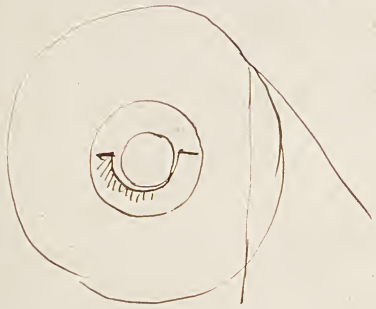
un traîneau armé de patins poli a été lancé sur la glace ; il a parcouru un espace $E = 20,4$ pendant un temps $T = 10'',2$; on aura

$$f = \frac{2 \times 20,4}{\quad} = 0,04$$

Rayon de corde ; la force nécessaire pour plier une corde sur une poulie est en raison directe de la tension ; en raison inverse du rayon de la poulie —

Cour —

Supposons une coupe verticale.



la tourillon monte jusqu'à

soit R_1 la react. exercée par le coussinet sur le tourillon non la regarder comme appliquée au milieu de l'arête de contact du tourillon sur le coussinet. — soit α l'angle de frottement $R_1 m O$ — soit λ —

ceci vous qu'il y a equilibre entre les forces qui sollicitent la machine — Ces forces sont P, Q, le poids de la machine V, et la reaction R_1 ; la react. R_1 R_2 ne sont pas egales ; car la force P n'est pas au milieu —

l'angle de frottement

écrivons les equat. d'équilibre qui nous sont nécessaires --

par l'axe du cylindre pour axe des x; la verticale pour axe des z. et oy —

parallèlement à l'axe des x, P, Q, V ne donnent rien; — donc les compos. des réact. parallèles à l'axe des x ont une somme nulle —

écrivons que la compo suivant la verticale est une somme nulle — on a

$$P\cos\gamma + Q\cos\beta - (R_1+R_2)\cos(\lambda-\alpha) + V = 0$$

on met le signe - devant

parallèlement à l'axe oy on a

$$P\sin\gamma - Q\sin\beta - (R_1+R_2)\sin(\lambda-\alpha) = 0.$$

écrivons que la somme des moments perpend. à l'axe est nulle — on a

$$PR - Qr - (R_1+R_2)r\sin\alpha$$

Les trois equat. suffisent pour determiner le mouvement.
on tire des equat. —

$$R_1 + R_2 = \sqrt{(P\cos\gamma + Q\cos\beta)^2 + (P\sin\gamma - Q\sin\beta)^2}.$$

L'equat. d'equilibre est

$$PR - Qr = f\sin\alpha\sqrt{}$$

Si on demande de determiner P. de telle sorte que l'equilibre existe

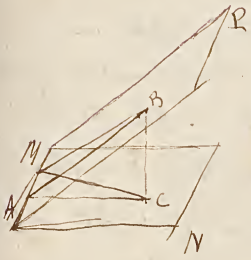
1060 n

106v

107v

Conférence de M. Bertrand

Géométrie Descriptive.



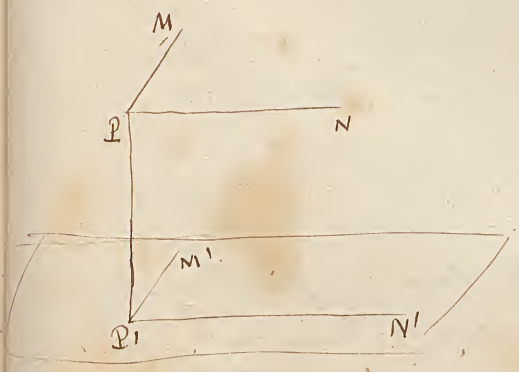
Soient deux plans MN, MP, le plan MN étant horizontal, les lignes menées dans le plan MP sont dites de plus grande pente, si elles font avec le plan MN le plus grand angle possible; je dis

soit AB une ligne de plus grande pente; je dis que AB est perpendiculaire à l'horizontale AM.

Car soit BM une oblique à AM. j'abaisse BC perpend. sur MN. je tire CA, BM: les deux triangles BCM, BCA sont rectangles. et ont BC commun. de plus on a BM > BA par hypothèse. donc l'angle CMB < que l'angle CAB. donc l'angle CAB est maximum.

Ainsi donc dans un plan donné les lignes de plus grande pente sont perpendiculaires aux horizontales.

quand des deux côtés d'un angle droit l'un est horizontal, la projection de cet angle est aussi un angle droit.



soit MPN un angle droit, dont le côté PN est horizontal: soit M'P'N' la projection de cet angle.

~~le plan MPP' est vertical.~~

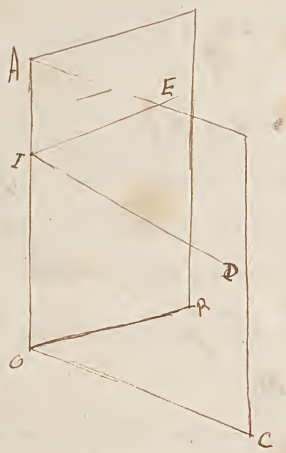
PN est perpend. à PM; mais PN est aussi perpendiculaire à PP', puisque PP' est une verticale; donc PN est perpendiculaire au plan MPP'.

donc P'N', parallèle à PN est perpendiculaire au plan MPP', et par suite à P'M'. donc l'angle M'P'N' est un angle droit.

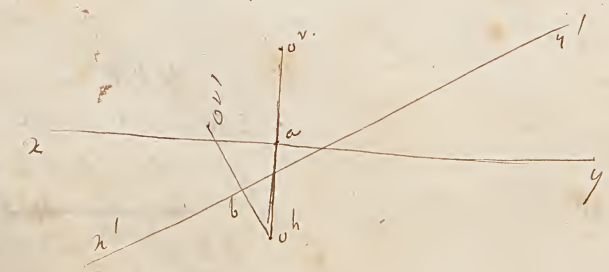
C'est le cas de la pratique avoir lieu.

Soient deux plans verticaux AB, AC.

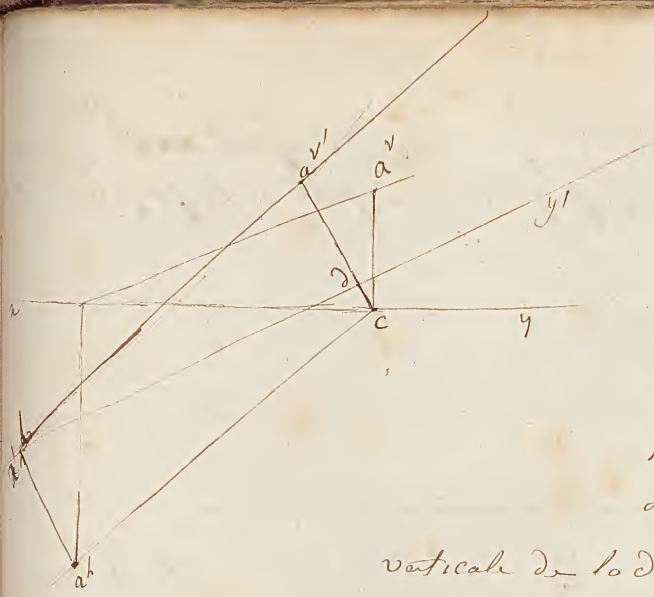
Soit une droite quelconque ID dans le plan AC pour avoir une droite qui fasse avec ID un angle droit, et qui soit située dans le plan AB, je mene par le point I un plan perpendiculaire à ID, soit IE l'intersection de ce plan avec AB, le disque IE est perpend. à AI. Car le plan mené est perpendiculaire à AC. donc IE intersection de deux plans perpendi. à IC, est perpend. à ce plan, et par suite est horizontale, la projection horizontale de cet angle, est l'angle droit COB.



Changement de plans de projection.

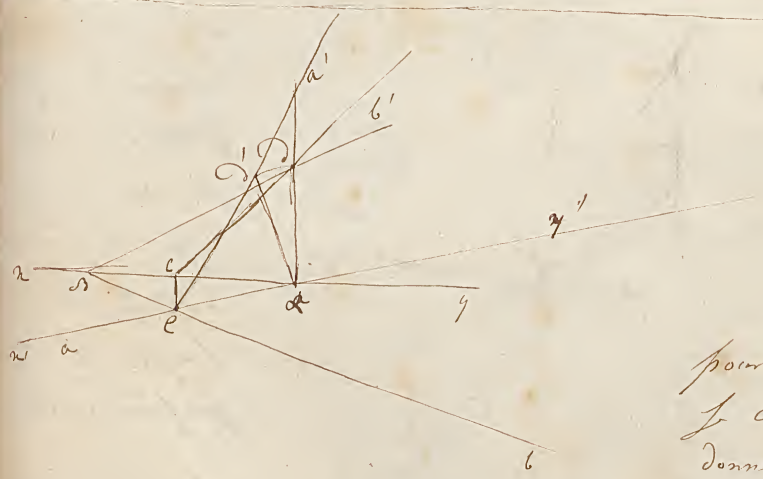


Soit o^h et o^v les deux projections d'un point; au lieu de prendre xy pour ligne de terre, prenons x'y' que descendront les projections du point. — Si de o^h j'abaisse $o^{v'}$ perpendi. sur x'y', si je prends $bo^{v'} = ao^v$, les points o^h et $o^{v'}$ seront les nouvelles projections.



la ligne de terre devenant x'y' que deviennent la projection de la droite a^h, a^v.

J'remarque que la projection horizontale ne change pas. la trace horizontale est toujours a^h. la projection verticale de le point est b. J'abatte cd perpend. sur x'y'; soit $da^{v'} = ca^v$. alors $ba^{v'}$ est la projection verticale de la droite.

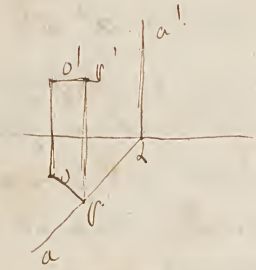


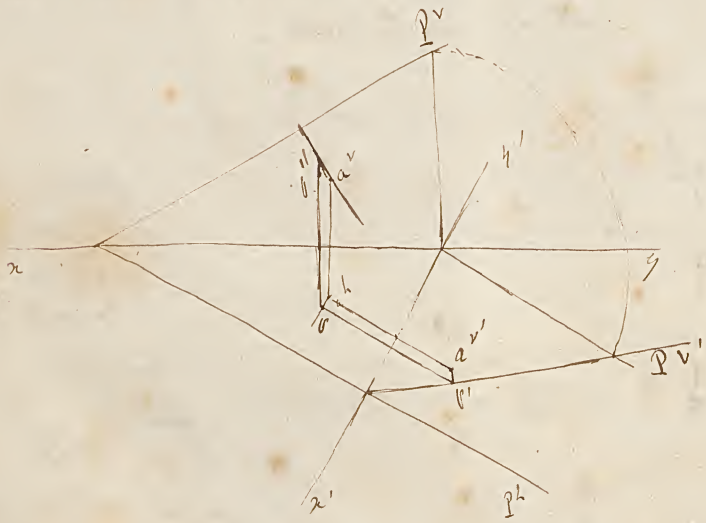
Soit un plan b.β b'. en prenant x'y' pour ligne de terre; quelles sont les nouvelles traces du plan.

la trace horizontale est la même. —

pour avoir la trace verticale J'cherche l'intersection du plan donné, avec le nouveau plan vertical $a\alpha a'$. la projection de cette intersection sont $a\alpha$ et cd. la trace de cette droite sont d et e. le point d se rabattra sur ~~sont~~ d'. $\alpha d'$ est perpend. à x'y' et du plan $\alpha d' = \alpha d$. les traces du plan sont donc alors eb et ed'.

La distance du point (o, o') au plan aa'a'' est op.
o, o' sont la projection du pied de la perpendiculaire.



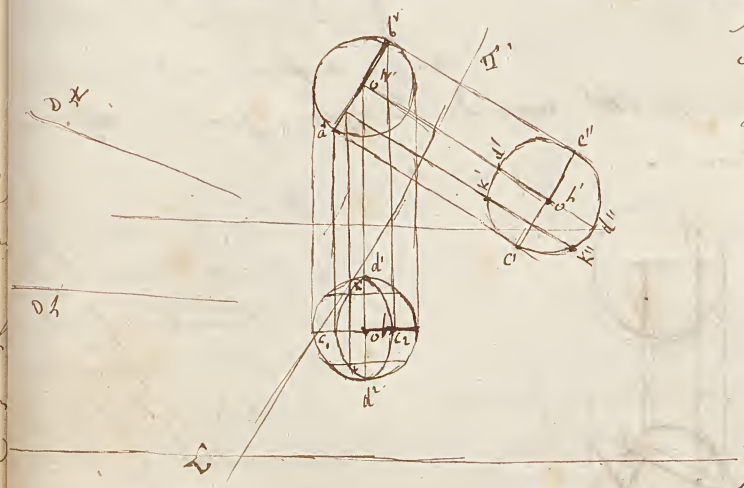


Soit P un plan
soit a un point.
il faut trouver la
distance de ce point au
plan.
Je vais changer le
plan de projection
de telle sorte que
le plan P soit
perpendiculaire à

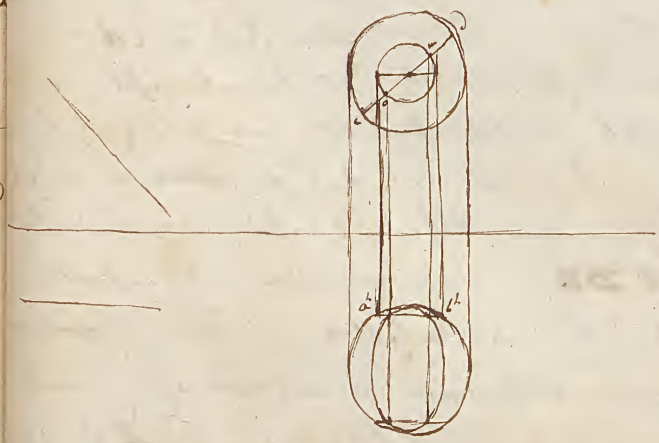
l'un deux. Pour cela, je prends pour ligne de terre
x'y' perpendiculaire à Ph. La trace verticale du plan est
Pv'. La projection verticale du point est a'v'. La distance
est donc p'a'v'. et le pied de la perpend. dans le nouveau
système ~~est~~ (o, o'). ; dans l'ancien, les projections sont
p et p''.

On donne la projection d'une sphère et d'une droite; on suppose qu'on mène à la sphère des tangentes parallèles à la droite donnée. trouver la projection du cercle de contact de la courbe avec le cylindre.

Si la droite donnée est perpend. au plan horizontal, la projection horizontale se réduit au grand cercle ~~projetant~~ qui est la projection de la sphère, et la projection verticale, est une droite parallèle à la ligne de terre et passant par le centre du cercle qui projette la sphère sur le plan vertical.

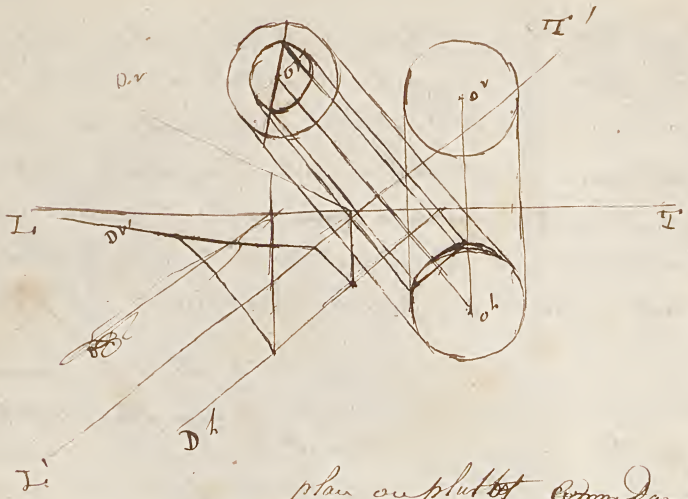


Supposons que la droite donnée (D^v, D^h) soit parallèle au plan vertical. soient o^v et o^h les projection du centre de la sphère prendre pour plan horizontal un plan perpendiculaire à la droite donnée; je prends donc LT' perpend. à DV; la projection verticale sera dans le système $a^v b^v$. et la projection horizontale sera le cercle ob'. revenant au système la projection verticale ne changera pas; je construis les points de la projection horizontale.

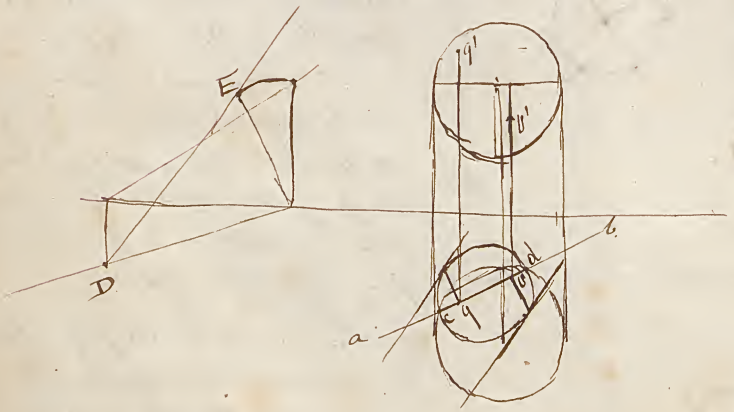


on peut construire les projections directement d'une manière assez simple

Je coupe la sphère par un plan parallèle au plan vertical soit $a^h b^h$ l'intersect. de ce plan avec le pl. hor. ~~le~~ ~~fr~~ ~~centre~~ ~~vertic~~ cercle d'intersection du plan mené, et de la sphère, se projettera en vraie grandeur sur le plan vertical; ce sera un cercle dont le diamètre sera ~~égal~~ égal à $a^h b^h$. je mène par le centre de la sphère un plan perpend. à la droite donnée soit cd son intersection avec le plan vertical; je ~~dirai que~~ les points o et m sont les projection verticales des deux points de contact, car pour qu'une droite soit tang. à la sphère il suffit qu'elle soit tangente à un cercle tracé sur la sphère. Les projection horizontales sont facile à trouver. et —

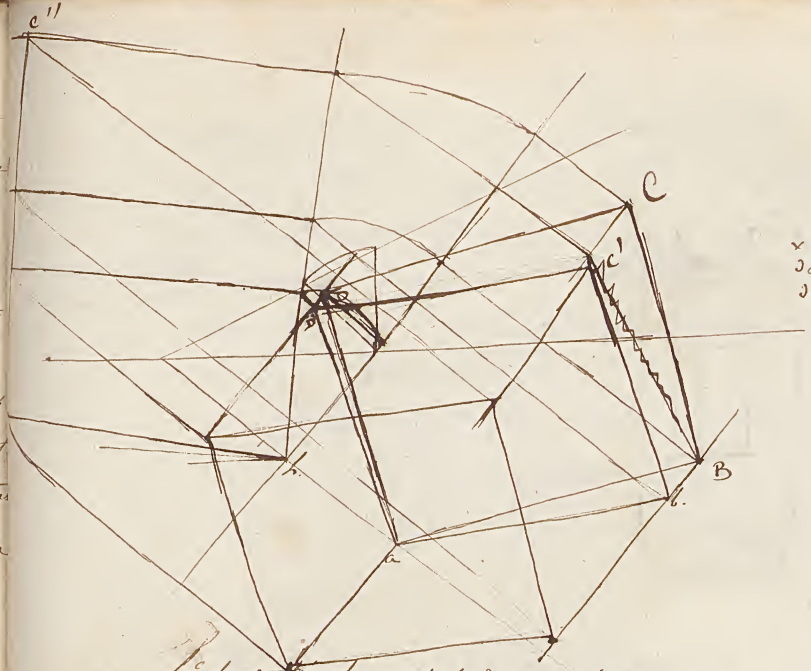


La droite donnée est quelconque. D^v et D^h sont les deux projections. Je prends un plan vertical parallèle à la droite donnée soit $L'T'$ parallèle à D^h pour nouvelle ligne de terre. Je chercherai comme précédemment la projection du cercle de contact en faisant un 2e changement de plan, ou plutôt ~~comme~~ dans la dernière épure, en opérant directement.



La droite étant g/q. on peut trouver la projet. directement. Pour cela je conduis un plan vertical parallèle à la projection horizontale de la droite soit abscisse horizontale le diamètre du cercle intercepté sera égal à cd.

Je suppose que je fais tourner le cercle intercepté autour du diamètre parallèle au plan horizontal, jusqu'à ce que le plan de ce cercle devienne horizontal. Ce cercle se projettera en vraie grandeur sur le plan horizontal. Je rabats aussi la droite, elle se rabat suivant DE. Si je mène au cercle rabattu des tang. parallèles à la droite rabattue, j'aurai les ~~rabattement~~ projection des points de contacts du cercle intercepté avec les tangentes menées dans l'espace parallèlement à la droite donnée, quand le cercle est parallèle au plan horizontal. Si le cercle se relève les projection horizontales seront p et q. les projections verticales sont p' et q'.



on donne la projection horizontale d'une droite. Cette droite part du point a[x] (x est situé dans le plan donné). Construire la projection d'un carré dont cette droite est le coté; et celle d'un cube dont le carré est la base.

Je prends un plan vertical perpendiculaire au plan donné. Et je rabat la droite dont la projection est ab sur le plan horizontal. Sur la droite aB, rabattue je construis le carré aBCD.

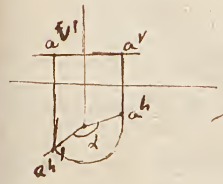
La projection horizontale du carré est abC'D'.

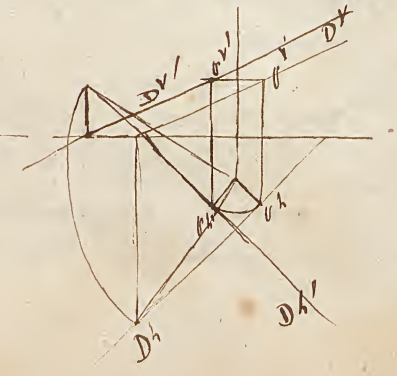
Je prends gh = aB. Je remarque que les arêtes du cube sont perpendiculaires au plan donné; les projections horizontales sont donc perpend. à la trace horizontale du plan; de plus remarque que les arêtes se projettent en vraie grandeur sur le 2e plan vertical. et — la projection horizontale trouvée, il est facile de trouver la projection verticale.

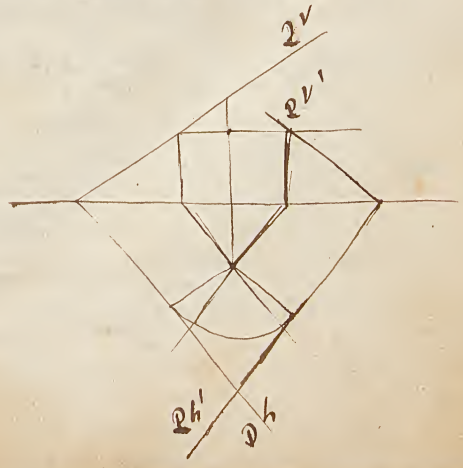
Rotation —

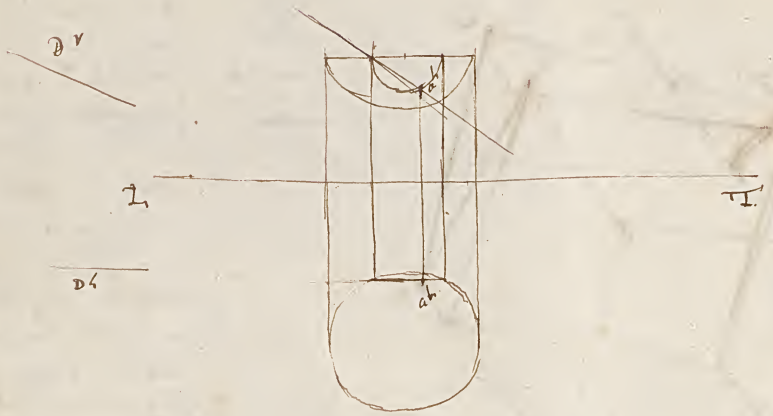
Faire tourner un point autour d'un axe vertical.
Faire tourner une droite — id — id —
Faire tourner un plan — — id id —

Mêmes questions autour d'un axe parallèle à l'un des plans de projection —









on donne une sphere et un

on donne un cylindre ayant pour base le cercle horizontal; et la generatrice parallele a la droite (D^h, D^v); (a^v, a^h) est un point du lieu.

La projection verticale de l'intersection de la sphere et du cylindre, est une ligne droite passant par le centre, dont la courbe d'intersection est plane; c'est un ~~grand~~ cercle de la sphere.

maintenant supposons que la direction des generatrices soit quelconque; dans ce cas je changerai de plan de telle sorte que le nouveau plan vertical soit parallele a la direction donnée.

on pourrait faire tourner le systeme donné autour d'un axe perpend. au plan horizontal; et on le ferait tourner jusqu'a ce que la droite donnée soit parallele au plan vertical pour simplifier, on ferait passer l'axe par le centre de la sphere.

intersection d'une sphère par un plan; ramener le cas, à celui où le plan est perpend. à l'un des plans de projection au moyen de rotations. —

intersection d'une sphère et d'une droite quelconque: ramener le cas à celui où la droite est parallèle à l'un des plans de projection, au moyen de rotations.

problème de la plus courte distance, de deux droites, ramené au cas où l'une des deux droites est perpendiculaire à l'un des plans de projection; (au moyen de rotations). — —

Surfaces —

On appelle surface cylindrique, une surface engendrée par le mouvement d'une droite qui restant parallèle à une direction fixe, parcourt une courbe donnée.

Un cylindre étant donné, la directrice n'est pas déterminée. Car si sur le cylindre on trace une courbe quelconque, on pourra la considérer comme la base du cylindre;

la section droite du cylindre est la section de ce cylindre par un plan perpend. aux génératrices; cette section droite suffit complètement pour déterminer le cylindre.

Une surface conique est une surface engendrée par une droite qui passe par un point fixe, et qui s'appuie sur une courbe quelconque.

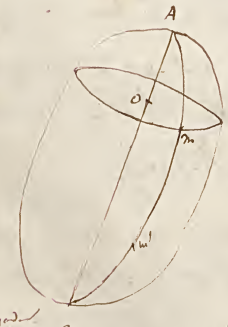
Un même cône, comme un cylindre, peut être considéré comme ayant une infinité de bases.

La courbe d'intersection du cône par une sphère concentrique, suffit pour déterminer complètement le cône.

Les courbes sont semblables quand le rayon varie; prenons donc une sphère de rayon 1; et je suppose que les deux cônes donnent la même courbe. Je transporte les deux cônes l'un sur l'autre et je fais coïncider les deux courbes, qui par hypothèse sont égales. Les deux sommets se confondent donc.

On appelle surface de révolution, une surface engendrée par une courbe qui tourne autour d'un axe, de telle sorte que chacun de ses points décrive un cercle dont le centre est le pied de la perpend. abaissée du point sur l'axe; ce qui caractérise ces surfaces, c'est que les sections faites perpendiculairement à l'axe sont des cercles.

On a une surface et un droite AB telle que toute section perpend. à AB soit un cercle ayant son centre sur AB; cette surface sera de révolution. Je trace sur la surface une courbe qlq. AMm'B. Par un point quelc. de la courbe m, le même un plan perpend. à l'axe. Soit o le point de rencontre de l'axe et de ce plan; il est évident que le point m considéré décrira un cercle de rayon om, et ne quittera pas la surface donc une même surface de révolution peut être engendrée par un infinité de courbes; pour qu'une courbe puisse être génératrice, il faut qu'elle rencontre tous les cercles perpendiculaires à l'axe AB; parmi ces courbes il y en a une qui peut servir de définition, c'est la courbe méridienne, c'est à dire la courbe d'intersection de la surface par un plan passant par l'axe.



X un point rapporté à la surface considérée comme engendrée par la ligne AMm'B tournant autour de AB. Donc c'est bien une surface de révolution

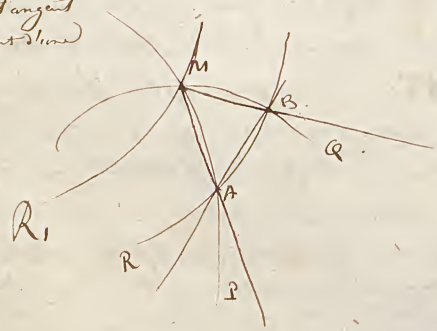
surface reglée; c'est une surface engendrée par une ligne droite, quelque soit la loi suivant laquelle cette droite se meut.

Les surfaces reglées peuvent aussi être des surfaces de révolution. Elle se partagent en 2 classes, distinguées par une propriété du plan tangent. Je suppose que AB soit une génératrice. Si le plan tangent est le même pour tous les points de la génératrice, on a une surface developpable.

Si le plan tangent varie d'un point à l'autre de la génératrice, on a ce qu'on appelle des surfaces gauches.

On entend par plan tang. en un point, un plan qui contient les tangentes à toutes les courbes qu'on peut tracer sur la courbe par ce point. × Soient deux courbes MP, MQ; soit une troisième courbe R, qui coupe la deuxième premières aux points A et B.

Ceci n'est en même temps un théorème, car il faut demontrer qu'il existe un plan tangent en chaque point d'une surface.



Considérons une troisième courbe ~~passant~~ je pourrai faire rapprocher la courbe R du point M, en modifiant sa forme bien entendu. Je joins MA, MB, MC; les trois droites sont dans un même plan; dans leur limite sont dans un même plan; or la ligne MB, MA, a pour limite l'une la tangente à la courbe MQ au point M, l'autre la tangente à la courbe MP au point A.

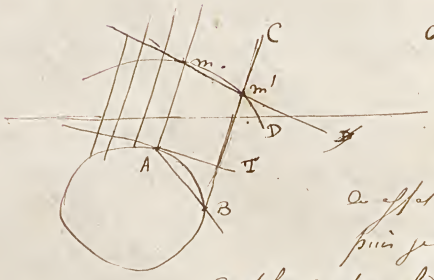
Quant à la courbe R, les points A, B se rapprochent de plus en plus; quand ces deux points seront très près, la droite AB sera très près d'être tangente, et à la limite elle sera tangente.

Voici ce qui n'est pas rigoureux, quoique une droite reunissant deux points voisins qui tendent l'un vers l'autre, elle peut fort bien ne pas devenir ~~la tangente~~ à la limite comme si la courbe était un point de rebroussement; cependant le théorème a lieu généralement, en chaque point d'une surface, il existe généralement un plan tangent.

Si a cette surface et un point sur elle, pour déterminer le plan tang. au point, on peut passer deux courbes par ce point; on y mènera deux tangentes à chacune de ces courbes; et ces deux tangentes déterminent le plan tangent.

Cylindre.

Soit un cylindre; soit un point m. le plan tang. au point m, est tangent le point du, et contient cette génératrice. Ajoutons la génératrice. Je suppose que la génératrice rencontre la directrice au point A au point A je mène AT, tangente à la courbe directrice; je dis que le plan m'AB sera tangent. En effet par A, je mène AB dans le plan de la directrice; puis je fais passer un plan suivant m'A et AB.



Ce plan coupera la surface cylindrique suivant BC parallèle à Am'; si je fais mouvoir ce plan autour de Am', jusqu'à ce que AB se confonde avec AT, je dis que ce plan sera tang. au cylindre au point m; et pour cela, je vais démontrer qu'il contient toute la tang. menée au courbe tracée sur la surface et passant par le point m. Soit m'D une de ces courbes. Cette courbe rencontrera nécessairement la génératrice BC en un point m'. et la droite mm' est située dans le plan m'AB; quand m'AB, tend vers m'AT, mm' est toujours dans ce plan et tend vers la tang. à la courbe au point m. donc

Corollaire; un cylindre étant donné, on peut toujours trouver une prisme.

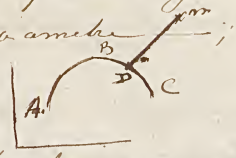
On dit aussi que le cylindre est l'enveloppe de position d'un plan qui se meut en restant parallèle à une direction donnée.

Toutes les surfaces peuvent être considérées comme des enveloppes de positions d'un plan.

Cons. la surface de la sphère est l'enveloppe de plans qui sont à une distance constante d'un point donné

Le plan tangent au cylindre est déterminé par un seul

Supposons qu'on veuille mener un plan tangent au point m; je coupe le cylindre par un plan qui est ABC la courbe d'intersection. Je peux regarder cette courbe comme la base du cylindre droit; maintenant sur le point m, je mène une parallèle aux génératrices; soit mD, cette génératrice; et soit D le point où elle rencontre ABC; il suffit évidemment de connaître le point D; ce comme ce point est sur la courbe ABC, il suffit d'avoir l'une des coordonnées;



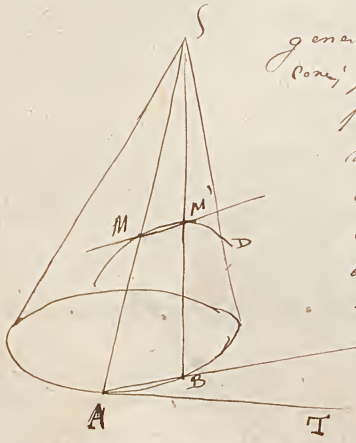
dans un cylindre non droit il faut deux coordonnées pour déterminer le plan tangent.

Si on a une sphère si on veut mener un plan tangent en un point pris sur la surface de cette sphère, pour déterminer ce point il faudra connaître deux des coordonnées; car un point étant situé sur une surface, si l'on connaît deux de ses coordonnées, la troisième est connue.

dans une surface qlq. il faut 2 condit. pour déterminer le plan tangent.

Surfaces coniques —

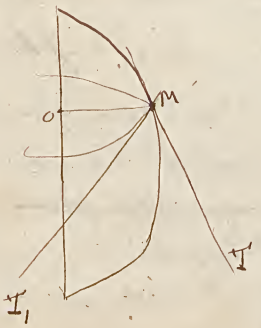
Pour mener un plan tang. au point M, je mène la génératrice SMA; par A, je mène AT tangente à la base du cône; je dis que le plan SAT est le plan cherché. Soit SAB un autre plan qui coupe le cône suivant SB; je fais mouvoir le plan SAB autour de SA, jusqu'à ce que AB coïncide avec AT. Je dis que ce plan SAT contient toutes les tangentes aux courbes tracées sur le cône et passant par le point M. Soit MD une courbe; elle rencontre SB en un point M'. quand SAB tend vers SAT, MM' qui est toujours situé dans le plan SAB, tend vers la tangente à la courbe MD. donc le plan tang. au point M est tangent en tous les points de la génératrice qui passe en M, et contient cette génératrice.



Surface de révolution.

Le plan tang. doit contenir la tang. au méridien qui passe en M et la tang. au parallèle.

Ce plan est perp. perpend. au plan méridien qui passe en M.



MT₁ est perpend. à OM, et est dans le plan du parallèle. MT₁ est aussi perpend. à cela à l'axe. donc elle perpend. au plan méridien; donc TMT' est perpend. au plan méridien

Cette propriété est la même que la suivante.

on peut dire une normale à une surface de revolution. Le plan, car le plan meridien ~~étant perp.~~ perp. au plan tang., la normale est située dans le plan meridien. donc. etc.

Cette propriété est la même que l'autre; car si on suppose cee demontré on en deduit la première.

On a donc deux moyens pour mener un plan tang. à une surface de revolution —

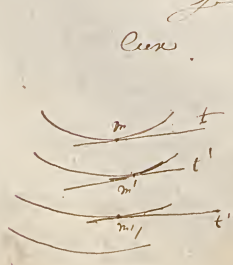
~~Les propriétés des plans tang. sont le caractéristique de la surface —~~

~~Toute surface dont tous les plans tang. sont parallèles à une même droite est un cylindre; un parallèle surface doit avoir un même plan tang. à une infinité de points différents; ~~les cond.~~ tout le long d'une meridienne.~~

~~Si la coupe la surface par une série de parallèles entre eux.~~

~~les tang. mt, m'l' m''t'', sont parallèles, et les plans tang. en m, m', m'', sont parallèles entre eux; ~~je le suppose que cela soit possible~~ — Or ils sont tous parallèles à AB et passent par des tangentes parallèles entre elles. — maintenant si deux tous ces plans parallèles coincident.~~

(1) Je suppose que les points m, m', m'' soient choisis de telle manière que cela arrive.



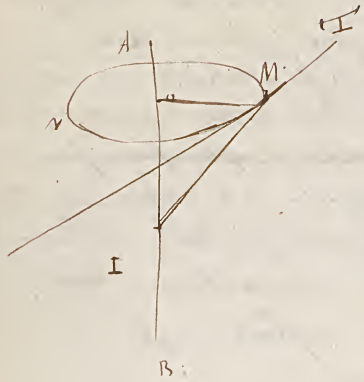
B

A

soit la courbe de points d'intersect. les différent. tang. doivent être parallèl. à un plan fixe, puisqu'elle en même temps a AB et a mt. donc elle se projettera parallèlement entre elle sur un plan perpend. à ce plan fixe. or la tangente à une courbe se projette suivant une droite qui est tang. à la projection de la courbe. or il est impossible qu'une courbe ait toutes ses tangent parallèles, donc la courbe se projettera suivant une droite sur un plan convenablement choisi. donc la courbe est plane. &c

quand un plan enveloppe une portion d'espace, peut être considéré comme les intersections successives de portion d'espace

la courbe est coupée par une série de plans parallèl. je prend une série de parallèl tang. parallèl entre elle.



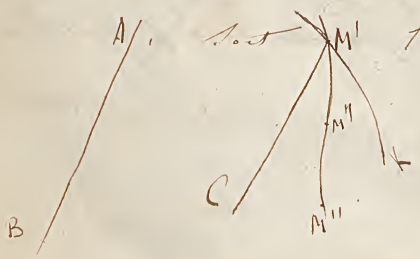
Toute surface dont la normale rencontre une droite fixe est de révolution.

Par M je mene un plan perpend. a AB. la courbe d'intersect. in sera un cercle; soit MI la normale; et MT la tang. en M; MT sera perpendiculaire a MI; mais MT est aussi dans un plan perpendiculaire a l'axe, et perpend. a cet axe; donc MT est perpend. au plan MIO. (tout ab. tout ou le plan MN coupe l'axe.). MT étant perpend. au plan MIO, est perpendi a OM. donc OM est une normale ~~passant~~ passa coupe l'axe au point O; il en est de même des autres normales de la courbe MN. Donc cette courbe est un cercle. l'eq. d'une normale est $y-y' = -\frac{dx'}{dy'}(x-x')$. Si on veut que cette normale passe constamment par un même point que je suppose l'origine, on aura $y' = -\frac{dx'}{dy'}x'$ ou $y'dy' + x'dx' = 0$.

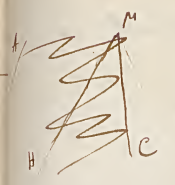
d'où $x'^2 + y'^2 = C$. donc et

Démonstration relative au cylindre

Je coupe la surface par un plan parallele a AB.



La courbe d'intersection si je considère le plan tangent au point M' ce plan doit contenir la ~~le plan tang. au dit point de cette courbe coupe du plan de la courbe, ramenons~~ ~~cette droite~~ tangente M'T', et la ligne M'C parallele à AB. donc le plan tangent au point M est le plan même de la courbe. Ceci fait voir que l'intersection ne peut être une courbe. Car si par le point M' je menais un autre plan sécant parallele a AB, on démontrerait de la même manière que le plan tang. au point M' est le plan de la courbe MK. donc; une surface pourrait avoir autant de points une infinité de plans tang. car le point M' est quelconque. L'intersection est donc une droite



l'absurde

~~soit MC cette droite, le plan tang. au point M devra contenir la droite MC et la droite~~, on prouverait comme précédemment que si on mène par le point M plusieurs plans parallèles à AB les intersections de ces plans ~~se réduiront toutes~~ avec la surface se réduiront à une même droite parallèle à AB et passant par le point M; ~~et~~ qui est l'intersection commune de tous ces plans; ainsi donc on peut regarder la surface comme engendrée par une droite qui se meut parallèlement à elle même.

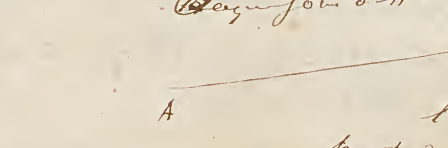
Toute surface dont les plans tangents passent par un même point est un cone.

Soit S le sommet du cone. Par le sommet je mène un plan sécant; soit SS'M la courbe d'intersection. Le plan sécant doit contenir SM et le tang. en M à la courbe SS'M. Donc ce plan sécant se confond avec le plan tangent au point M. On voit que le plan tangent est le même autour du point de l'intersection. Si je mène par le point S et par le point M un autre plan, si on suppose que SS''M soit la courbe d'intersection on verra que en un point quelconque de la surface du cone on pourra mener une infinité de plans tangents. Donc toutes les plans qui passent en S et M coupent la surface suivant une même droite SM donc etc —

Surfaces réglées. —

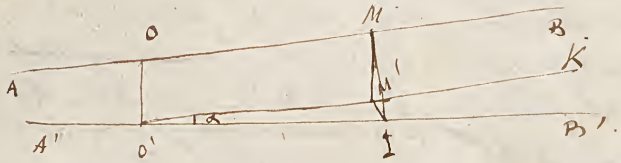
Le caractère d'une pareille surface est d'admettre des génératrices rectilignes; de telle sorte qu'en chaque point de la surface, on peut faire passer une droite qui est contenue entièrement dans la surface —

Soit AB une génératrice; voyons la variation du plan tang. quand on passe d'un point à un autre de la génératrice donné; chaque point de AB a son plan tang.; quoique la droite AB est située dans tous les plans tangents.



Lorsque le plan tang. en chaque point de la génératrice, la surface réglée est développable.

Soit donc une génératrice AB, et une autre génératrice voisine A'B'.



Les deux génératrices étant infiniment voisines, que sera OO'. Par O' je mène O'K parallèle à AB; je prends le point M et le prends en ce point la position du plan tangent.

Du point M j'abaisse une perpendiculaire sur le plan KO'B'; par M' ~~je mène~~ j'élève M'I perpendiculaire sur O'K; je joins MI.

Soit MM' celle perpend.

Le plan AMI a pour limite le plan tang. au point M. Ce plan tang. doit contenir AB. Le point M et I sont des points de la surface; la ligne MI est une droite qui intercepte un certain contour; et j'imagine un contour qui sera le lieu des positions de I quand A'B' s'approche d'AB; MI sera tang. à cette courbe quand A'B' tendra à se confondre avec AB. Le plan tang. serait connu ~~aussitôt que le plan tang~~, si l'on connaissait l'angle que ce plan fait avec BOO'.

Soit $MMI = \varphi$ valeur l'angle de cet angle, cet angle mesure l'angle de deux plans AMM' et du plan tang. on a

$$tg\,\varphi = \frac{MI}{MM'}. \quad \text{or } MM' = OO' = \varepsilon \quad \text{donc } tg\,\varphi = \frac{MI}{\varepsilon}.$$

$$\text{or } MI = M'O'\,tg\,\alpha \quad \text{donc } tg\,\varphi = \frac{M'O'\,tg\,\alpha}{\varepsilon}.$$

$$\text{donc } Lm.\,tg\,\varphi = Lm\,M'O' + Lm.\frac{tg\,\alpha}{\varepsilon} = OM.\,Lm\,\frac{tg\,\alpha}{\varepsilon}.$$

$$Lm\,\frac{tg\,\alpha}{\varepsilon} = Lm\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\,\frac{tg\,\alpha}{\alpha}\right) = Lm\,\frac{\alpha}{\varepsilon}. \quad \text{donc } tg\,\varphi = OM.\,Lm\,\frac{\alpha}{\varepsilon}$$

or on peut avoir

$$Lm.\frac{\alpha}{\varepsilon} = K. \quad Lm.\frac{\alpha}{\varepsilon} = 0. \quad Lm\,\frac{\alpha}{\varepsilon} = L$$

1er Cas.

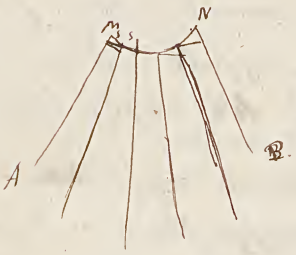
C'est alors que α et ε sont 2 infiniments petits du même ordre.
l'angle de deux génératrices voisines est du même ordre que leur plus courte distance.
on a alors $\operatorname{tg}\varphi = K \times OM = KL$.

Si on part du point O on aura zéro; si on s'éloigne l'inclinaison augmente; et le plan tang. tend à tourner de 90°; si on s'éloigne à l'infini.

long. de φ augm. proportionnellement à la dist. du point M au pt O.

On déduit de là que tout plan qui passe par une génératrice est tang. en certain point; et normal en un autre point.

Soit $\lim \frac{\alpha}{\varepsilon} = 0$ constamment.
la surface est cylindrique



Je trace une courbe quelconque, contenant les points où la mesure de la plus courte distance du 2e gén. voisin. arcs de ~~la courbe~~ ~~entre plan perpend.~~ compris entre deux génératrices voisines étant plus grands que les plus courtes distances correspondantes.

soient $s_1\ s_2 \ldots s_n$ ces arcs.
de sorte que $s_1 + s_2 + \ldots + s_n = S$. S étant MN.
Soit que $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ les plus courtes distances. on aura

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n < S.$$

Dans le cas qui nous occupe, α est un infiniment du 2e ordre par rapport à ε. on aura donc

donc $\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1} = h_1$ $\frac{\alpha_2}{\varepsilon_2} = h_2$ — $\frac{\alpha_n}{\varepsilon_n} = h_n$.

$h_1, h_2 \ldots h_n$ étant des quantités très petites qui convergent vers zéro. quand on augmente le nombre des génératrices comprises entre A et B.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{\varepsilon + \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} = H.$$

H étant compris entre la plus grande et la plus petite des quantités $h_1, h_2, \ldots h_n$.

Cette fraction doit tendre vers zéro; et comme le dénominateur a une limite finie, le numérateur doit avoir une limite nulle. –

Par un point O de l'espace, je mène des parallèles à ces différentes génératrices; le cône ainsi formé se réduira à une droite; du point O je décris une sphère avec un rayon égal à 1.
Les angles compris entre 2 génératrices ~~seront~~ auront pour mesure les arcs; et l'angle A_1OB_1 aura pour mesure l'angle $A'OB'$. Car chaque angle ayant pour mesure un arc correspondant, la somme des angles aura pour mesure la somme des arcs. donc OA_1 et OB_1 les correspondent.

3e Cas — la surface est développable.

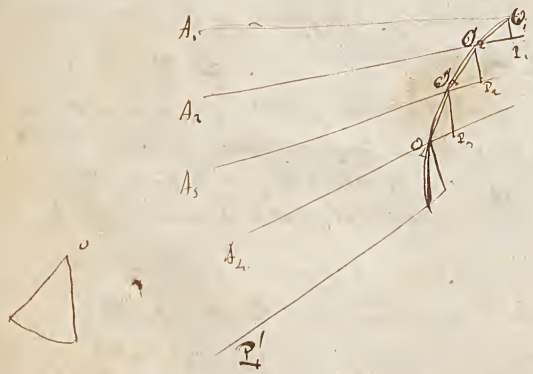
on avait tout à l'heure. $tg\varphi = l.\,\lim \frac{\alpha}{2}$.

donc $tg\varphi = 0$ donc $\varphi = 90$; donc il est perpend. au plan BOO

il y a une difficulté — ; au point O'. on pourrait dire, le plan tang. doit contenir AB; et OO'; donc le plan tang. serait BOO'. Ceci fait à chaque rapprochement fait; ceci est inexact, car d. ce que O et O' se réunissent en un seul point il ne s'ensuit pas que la ligne OO' devienne tang.; ~~c'est~~ elle ne le deviendrait pas s'il y avait en O un point de rebroussement. C'est précisément ce qui arrive. toutes les surfaces développables ont une; il faut remarquer que le point O n'est pas fixe; car quand A'B' se déplace le plan coupe distance se déplace aussi

et alors en deux points infiniment voisins on aurait deux plans tang. perpendiculaires entre eux. Il y aurait discontinuité.

Dans les surfaces développables, les tang. à ~~cette~~ courbe de la surface forment une surface développable ou les génératrices sont tangentes à une même courbe.



Je prends la courbe qui passe par les points où se mesure le plus courte distance de deux génératrices voisines

Soient $A_1 P'$ deux génératrices à distance finie. J'intercale des génératrices et la somme.

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \quad + \varepsilon_n$$

Alors ~~c'est pour limite~~ — ~~Car puisqu'on a~~ $\lim \frac{\alpha}{2} = \alpha$ on a alors $\lim. \frac{\varepsilon}{\alpha} = 0$ donc $\frac{\varepsilon_1}{\alpha} = h_1$ $\frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} = h_2$ $\frac{\varepsilon_3}{\alpha_3} = h_3$ etc

Je mène les cordes; j'aurai $O_1 O_2 = \frac{\varepsilon_1}{\cos\varphi_1}$ $O_2 O_3 = \frac{\varepsilon_2}{\cos\varphi_2}$

la somme des cordes sera $\left(\frac{\varepsilon_1}{\cos\varphi_1} + \frac{\varepsilon_2}{\cos\varphi_2} + \quad \frac{\varepsilon_n}{\cos\varphi_n}\right) =$

$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \quad - \varepsilon_n) V_1$ V_1 étant compris entre $\frac{1}{\cos\varphi}$ $\frac{1}{\cos\varphi_n}$

or par conséq. —

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \quad + \varepsilon_n}{\alpha_1 + \alpha_2 \quad + \alpha_n} = H$$

Comme $\alpha_1 + \alpha_2 \quad + \alpha_n$ ne peut augmenter indéfiniment $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \quad + \varepsilon_n$ tend vers zéro.

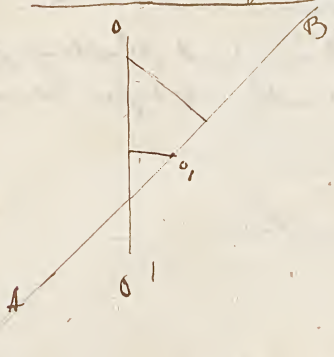
car ~~si par le point O~~ ~~on mène de parallèles aux génératrices~~ ~~on aurait un cône et on aurait~~

Comme $\sin(\varphi_2+\varphi_1-\varphi_n)=0$ il faut que K soit infini. et comme celui est indépendant de la distance des deux generatrices, on conclut que pour deux generatrices aussi rapprochées qu'on voudra on aura $\varphi=90°$. Donc O_1O_2 est parallèle à OA_1 et comme la limite O_1O_2 est tang., OA_1 a la limite sera aussi tangente.

Rapprochement si on prend une courbe à double courbure et A au mere de tang., le lieu de ses tang. est une surface developpable

Nous demontrons celle plan tang. =

Une droite tournant autour d'une autre engendre une surface qui est non developpable

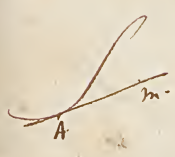


Comme la surface est une surface de revolution la normale va rencontrer l'axe. or si le plan tang. etait constant pour tous le point de tangence. AB, la normal seraient parallèles. or il est impossible que des droites parallèles passant par tous les points de AB, rencontrent l'axe OO' qui n'est pas dans un meme plan avec AB. – remarquons la chose que le plan tang. fait avec le plan des angles φ. d'où le tang. en projeté de OM.

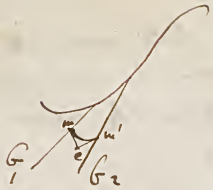
~~La surface developpable peut être considérée comme l'enveloppe des plans tangents à cette surface; le plan tangent étant déterminé par certains paramètres.~~

La courbe telle que ses tangentes donnent la surface developpable est dite arête de rebroussement.

Une autre propriété des surfaces developpables c'est qu'on peut les considérer comme enveloppe de plans mobiles; mais ayant un seul paramètre dans leur equation. Car en chaque point de l'arête de rebroussement, il n'y a qu'une seule tangente; donc il n'y aura qu'un seul plan tang. tout le long de la tang. donc pour un point qlq.^m de la surface il suffira de donner le point A où la Gener. mA touche l'arête de rebroussement. Mais un point sur une courbe donnée est déterminé par 1 seule variable donc la

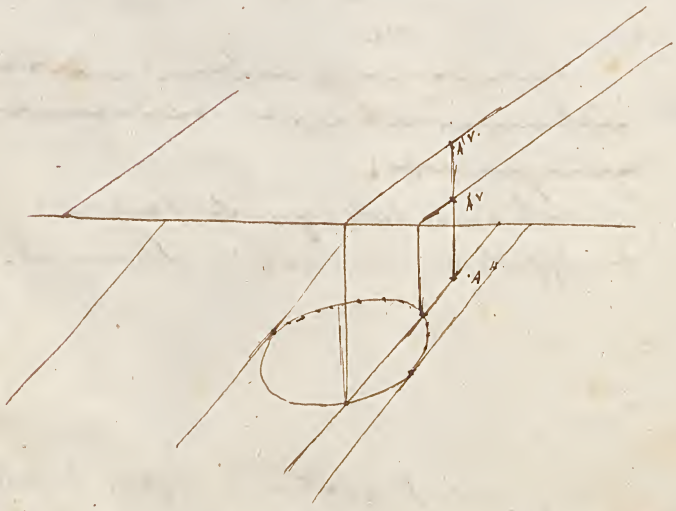


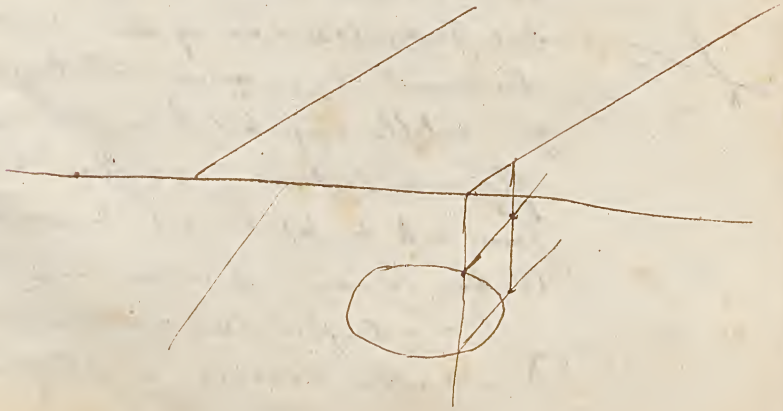
La surface peut aussi être considérée comme le lieu des intersections successives des plans tang. soient G_1 et G_2

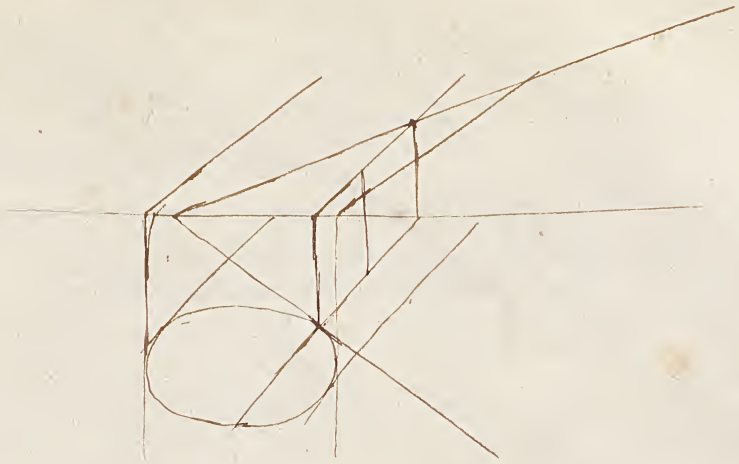


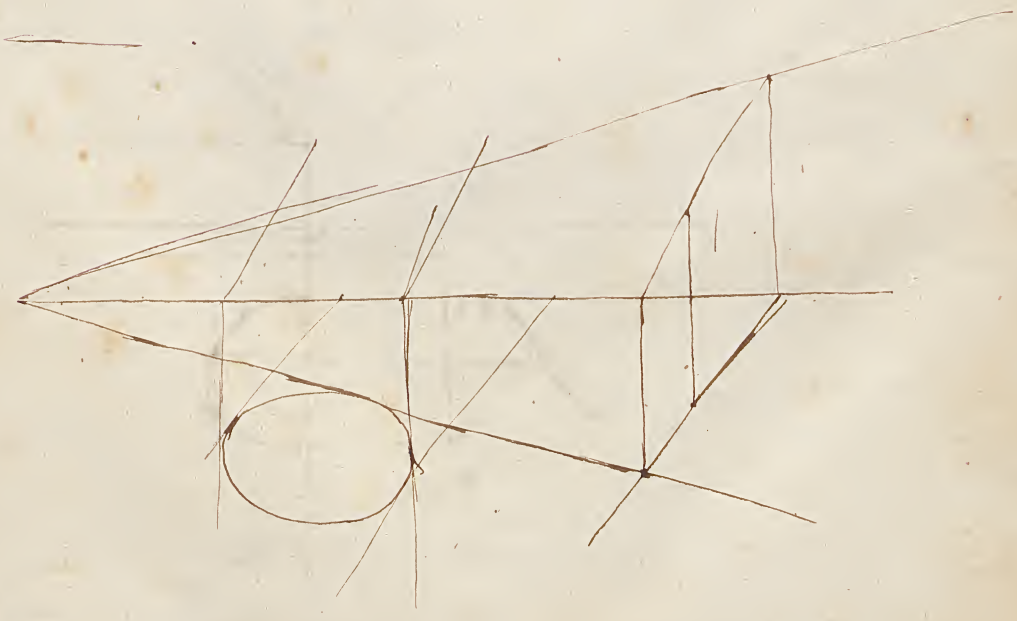
deux generatrices voisines. Je mene un plan secant quelconque, ce qui donne mm' arc de la courbe. Le plan tang. en m est dans le plan tangent suivant G_1. Le plan tang. en m' est dans le plan tang. suivant G_2. mais ces deux plans tang. se coupent en e très près de mm'. Donc l'intersection des deux plans tang. suivant G_1 et G_2 est très voisine de chacune des génératrices. et la limite est la generatrice G_1 lorsque G_2 approche de G_1 indefiniment, dans le plan tang. par les intersections successives reproduisent la generatrice de la surface et engendrent la surface —

Plan tang. au cylindre —

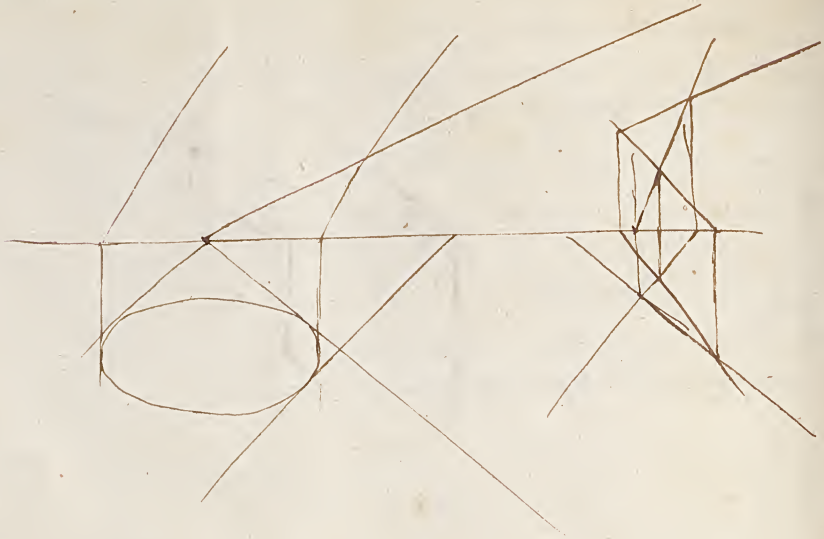


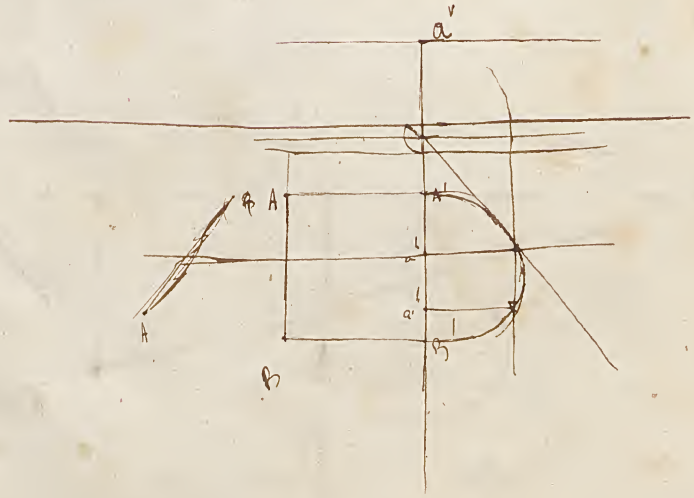






119 v



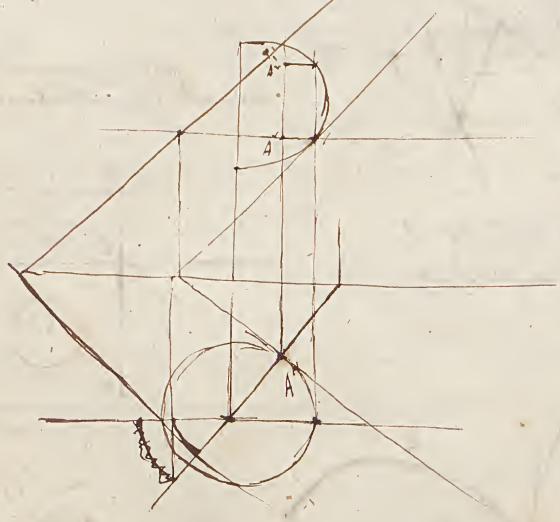


Un cone est engendré par une droite ab, ab' ; mener un plan tang. au cone par un point pris sur ce cone.

Mener à ce même cone un plan tang. par un point extérieur

Mener à ce cone un plan tang. parallèle à une droite qui est elle même parallèle au plan de la base du cone.

Surface d'révolution.



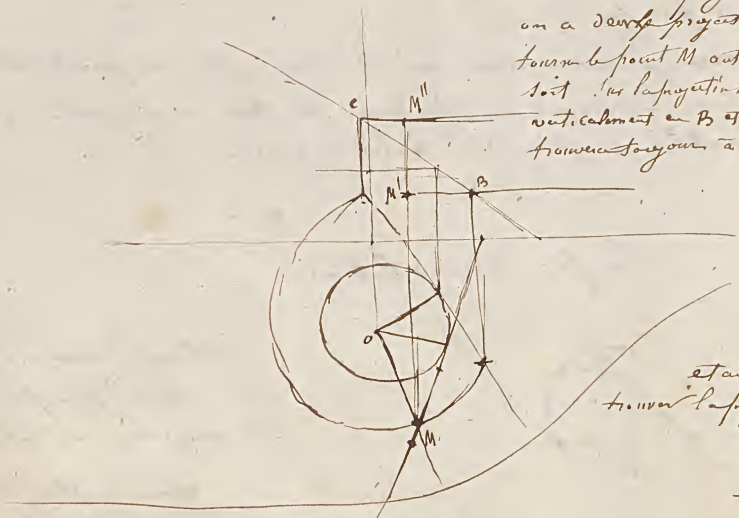
Étant donné la projection horizontale d'un point trouver la projection verticale

Mener un plan tang. en un point de la surface.

Construction ; en s'appuyant sur ce que la normale à un même parallèle coupent toutes l'axe en un même point.

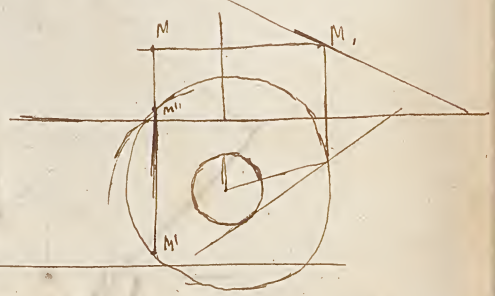
au lieu de donner le cercle meridien, on donne une generatrice dans une certaine position. Connaissant la projection horizontale d'un point, deduire la projection verticale.

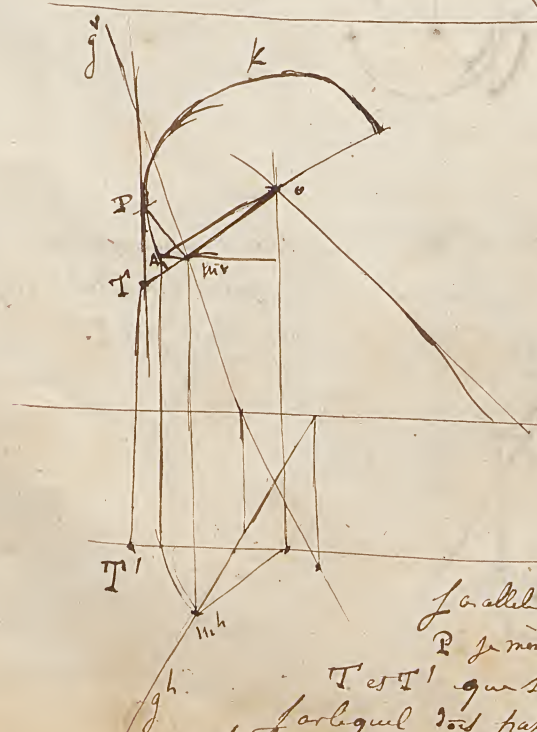
La projection horizontale du point étant M, on a deux projections verticales. M'M'': faire tourner le point M autour du point O jusqu'à ce que ce point soit sur la projection horizontale de la droite; il se projetera verticalement en B et C. Si on ramene, il se trouvera toujours à la même hauteur.



La projection verticale étant M, les projections verticales correspondantes sont M' et M''.

étant donné la projection verticale trouver la projection horizontale

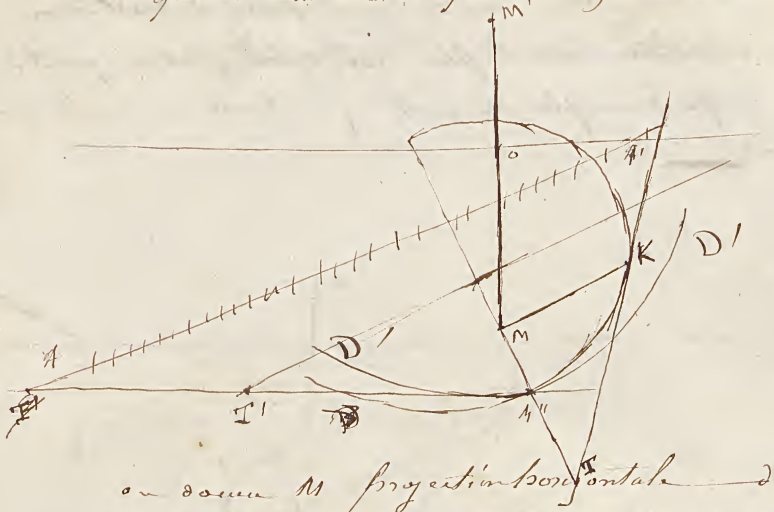




on suppose l'axe parallèle au plan vertical. on donne une génératrice (g^v, g^h) et un point $(m^v m^h)$ sur cette génératrice. trouver le plan tang. au point M

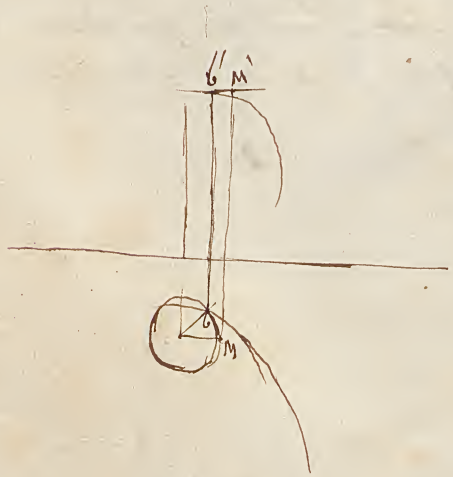
Je trouve la distance du point donné à l'axe. Cette distance est égale à OA. le cercle OAK est la projection du parallèle que passe au point donné et qu'on a fait tourner de manière à le rendre parallèle au plan vertical. Si au point P je mène l'a tangente, j'obtiendrai T et T' qui seront les projections d'un point par lequel doit passer le plan. Mais il doit passer par la génératrice donnée; donc il est déterminé.

l'axe est dans le plan horizontal ; on donne la directrice DD' qui est aussi dans le plan horizontal



on donne M projection horizontale d'un point. Je prends OM' = MK ; et M' est la projection verticale du point.

Les points I et I' appartiennent au plan tangent. Le point (M, M') appartient aux plan tang. donc ce plan est déterminé. En tirant les droites I'M', IK ~~qui sont~~ qui elles seront relatives à l'appartenant au plan tangent. donc ce plan est déterminé.



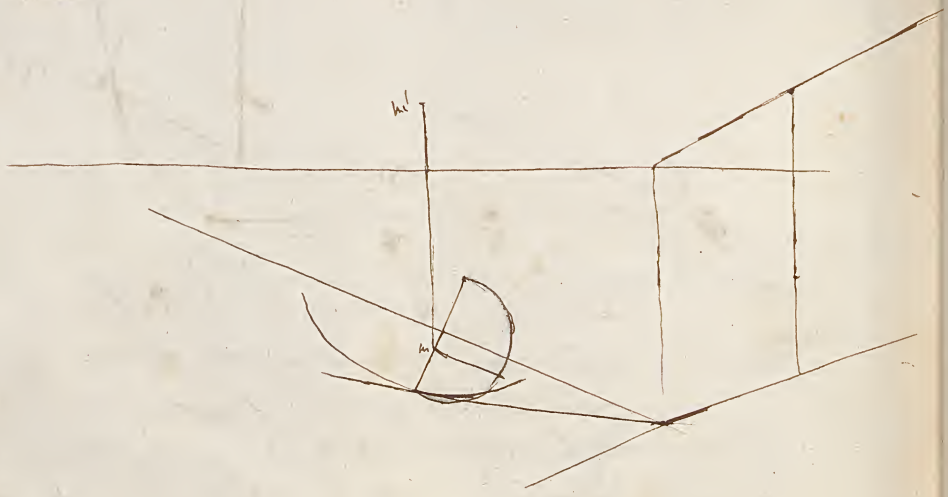
on donne l'axe perpend. au plan horizontal, et les deux projection d'une génératrice.

Si on donne la projection horizontale M, la projection ~~horizonta~~ verticale sera M'

Le plan tang. en (M, M') contiendra la tangente au parallèle. il doit contenir la tangente ~~au parallèle~~ la ~~directrice~~ ; or au point (b, b') la tangente se projette suivant les tangentes aux projections. j'aurai ainsi une droite que je prolongerai jusqu'à ce qu'elle perce au point (M, M'). Le plan tang sera ainsi déterminé.

On pourrait chercher le point où la normale au point (M, M') coupe l'axe. Pour cela au point b, et b' je mène les tang. aux projections. Puis par le point (b, b') je mène un plan perpend. à cette droite. Le point de rencontre de l'axe et de ce plan, est le point où coupe la normale au point (M, M').

on donne une surface de révolution dont l'axe est situé dans le plan horizontal, et un point; mener par ce point un plan tangent qui touche un parallèle donné ~~un point donné~~.

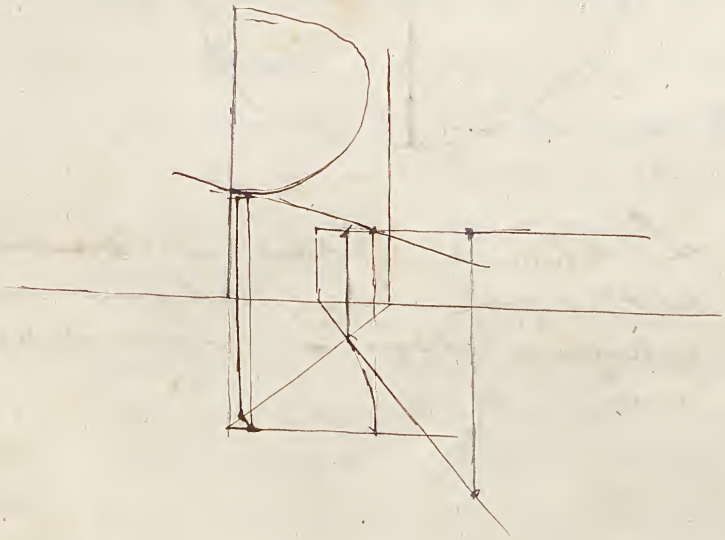


par un point donné on peut ~~mener~~ supposer qu'on mene du plan tang. * Et toutes les points d'un même parallèle on dira a un cone dont la base sera le parallèle. la question revient donc à mener un plan tang. a un cone donné par un point donné.

Mener par un point donné un plan tang. qui touche la surface ~~du~~ au ~~point donné sur un méridien donné~~ méridien.

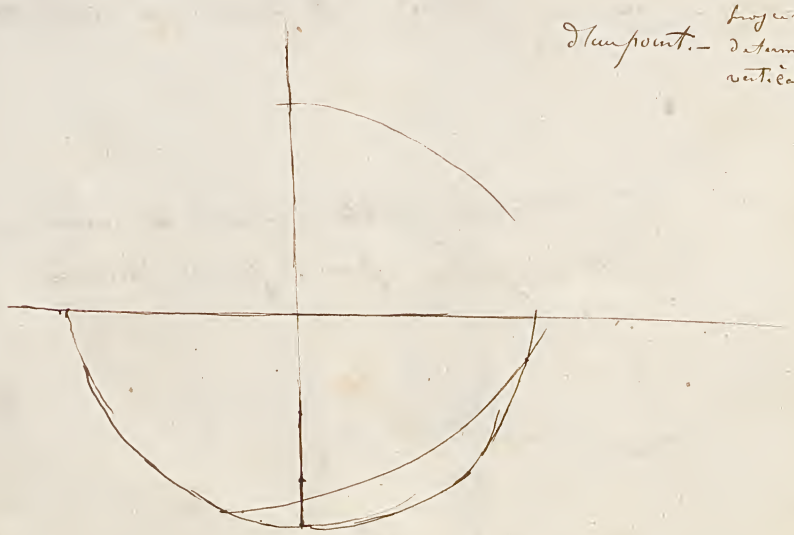
Le plan tang. à un meme méridien ~~sont tang.~~ à un cylindre dont le méridien est la section droite.

Le problem revient à mener un plan tangent à un cylindre par un point donné.

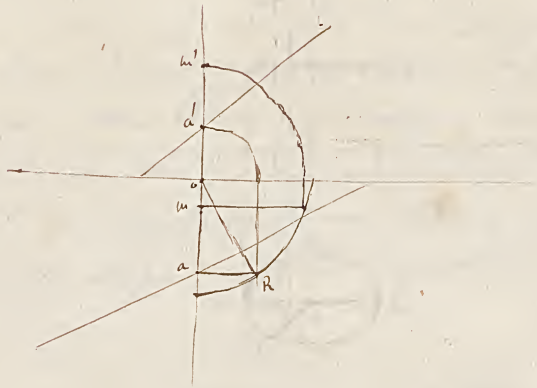


On donne une surface de revolution définie par son axe qui est la ligne de terre, et la projection de la courbe génératrice dans une position quelconque.

On donne la projection horizontale d'un point. — Déterminer la projection verticale.



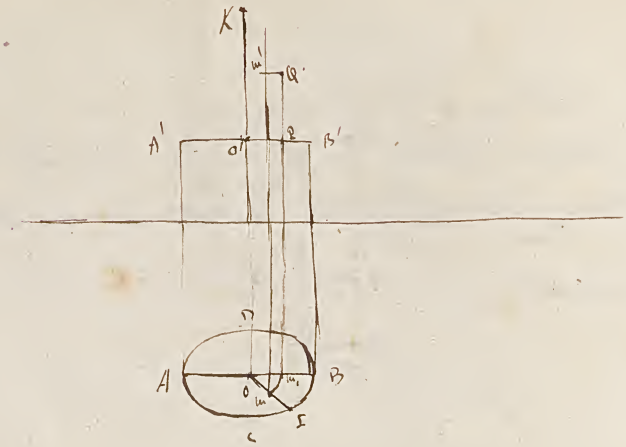
La solution de ce problème est identiquement ~~la~~ même que la solution du problème suivant, où la génératrice au lieu d'être quelconque est de cette ligne — Suivra identiquement la même marche — —



— ce une surface engendrée par une droite qui tourne autour de la ligne de terre, et dont on donne les deux projections. Mener un plan tang. en un point de cette surface.

Étant donné la projection horizontale d'un point trouver la projection verticale. Je trace le parallèle sur lequel se trouve le point M ; le rayon de ce parallèle est OR. La projection verticale correspondante est m'. Il s'agit maintenant de mener un plan tangent au point (m, m').

Je m'appuierai sur cette propriété que la normale en tous les points d'un même parallèle coupe l'axe au même point. — Or le point (a, a') est un point du parallèle sur lequel se trouve le point m. Je vais chercher le pied de la normale qui passe au point (a, a'). Comme le tang. au point (a, a') ~~se confond~~ est la génératrice ~~se confond avec~~ la génératrice elle même, il suffit de mener par le point (a, a') un plan perpend. à la génératrice. Ce point où ce plan coupera la ligne de terre sera le pied de la normale. — Je joindrai ce pied au point M et on mènera par le point M un plan perpendiculaire. Ce sera le plan tangent.



on donne une surface ayant pour base une ellipse horizontale dont les projections sont ADBC et A'B'. la surface est telle que si fils OK pendant a la base on fait passer un plan KOI la section est une ellipse dont l'un des axes est OK et l'autre est OI.

on donne la projection horizontale d'un point, trouver la projection verticale.

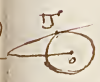
Soit m la projection verticale d'un point. je mène le plan KOI. et je fais tourner ce plan autour de l'axe entant le pied est en O. de cette manière l'ellipse interceptée par ce plan, se projette en vraie grandeur sur le plan vertical. je calcule l'ordonnée de l'ellipse dont les axes sont OK et OI, correspondante au point dont l'abscisse est OM ce qu'on peut faire sans construire l'ellipse; je suppose cette longueur de cette ordonnée calculée; elle se projettera suivant PQ; en supposant PQ égale à cette longueur. en revenant à la position primitive, la projection verticale sera m'.

mener un plan tang. en ce point. je ~~mène la tangente~~ suppose l'ellipse située dans le plan KOI ramenée à être parallèle au plan vertical; je pourrai mener par le point de cette ellipse que se projette en Q une tang, sans construire l'ellipse; puis je chercherai cette tangente dans sa véritable position

maintenant je suppose que par (m, m') je mene un plan perpendiculaire à l'axe: la section sera une ellipse semblable à l'ellipse ~~projetée~~ de base. ~~comme~~ Mais de cette ellipse est facile à determiner. Les axes se projettent en vraie grandeur sur les axes de l'ellipse AB CD. Cela par le point ~~proposé~~ (m, m') je pourrai mener un tang. à cette ellipse; le plan tangent sera ainsi determiné. —

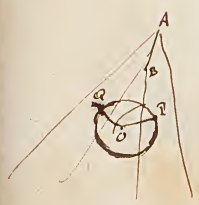
Mener à une sphere un plan tangent passant par une droite donnée.

On sait que par un point exterieur on peut mener une infinité de plans tangents, qui seront en meme temps tangents à un cone; et la courbe de contact est un petit cercle de la sphere.



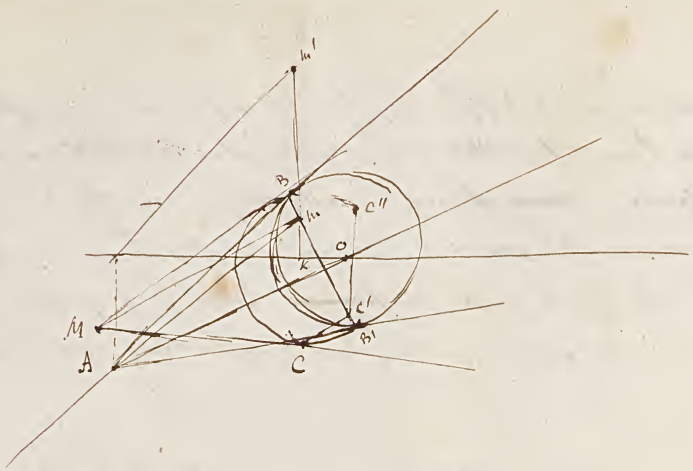
On prendra sur la droite donnée deux points, que l'on considère comme les sommets de deux cones circonscrits: le plan tang. demandé ~~sera tangent~~ ~~aux deux cones~~; ~~de plus le deux cones~~ le plan le cercle touchera la sphere en un point d'une courbe de contact; il touchera aussi la sphere en un point de la deuxième courbe de contact: donc le point d'intersection des deux courbes de contact sera le point de contact cherché; le plan sera donc determiné.

2e solution. On peut donner une autre solution. En poursuivant la remarque de celle ci, mener un plan tang. à un cone par une droite passant par le sommet du cone



1. du point O je labaisse OP, OQ perpend. sur chaque plan tang.

3e solution. Par ce point on peut mener deux plans tangents. Par la droite * le plan POQ est déterminé comme étant perpendiculaire à la droite donnée AB. On peut donc determiner le grand cercle que contient les points P et Q. Or ce plan est coupé par AB en un certain point; de ce point on meme deux tangentes au cercle POQ, les points de contact P et Q seront determinés. — et le plan tangent sera determiné.



on donne une sphère dont le centre est situé sur la ligne de terre. 2e solution.

2e solution. Je considère A comme sommet du cone; si par le point A je mene deux tangentes au cercle O. j'obtiendrai BB'; ~~BB'~~ et le diametre d'un parallèle que je peux considérer comme la base du cone. je cherche l'intersection (m, m') de la droite donnée avec la base du cone. je rabats ce point et la base du cone autour de BB'. Le rabattu de (m, m') est M. on Mm = m'K. par le point M je mene deux tangentes au parallèle rabattu. soit C un des points de contact le point relevé sera pour projection C', C''. il n'y aura plus qu'à mener un plan par ce point et la droite donnée

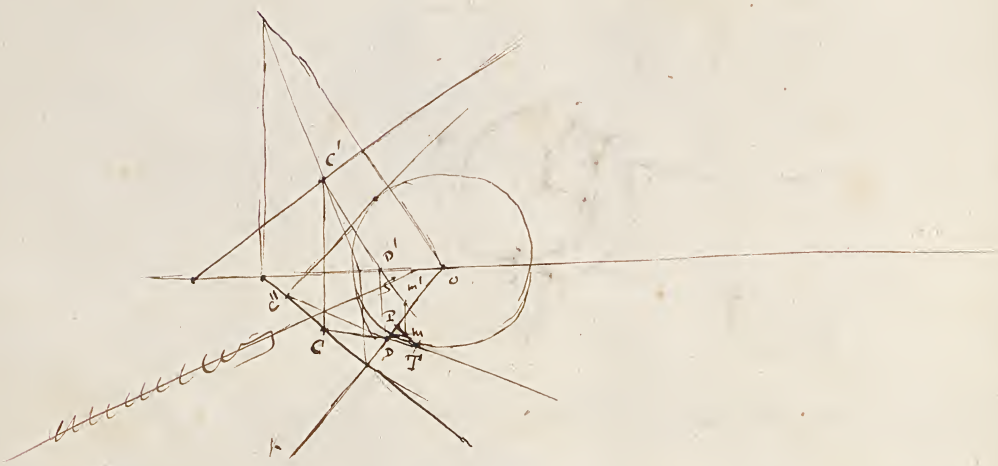
Solution fondée sur la construction de deux cones.

Je prends le trace horizontale de la droite donnée pour sommet de l'un des cones, et la trace verticale pour le sommet de l'autre cone. J'obtiendrai ainsi pour les bases des cones deux parallèles qui auront pour diamètre BB' et CC'.

L'intersection de deux cercles donnera les deux points de contact cherchés.

Pour déterminer l'intersection de ces cercles je détermine d'abord l'intersection de leurs plans, et il est évident que la projection de cette intersection sont precisement BB' et CC'. Je fais tourner cette droite autour de CC' avec la parallèle dont le diamètre est CC'. J'obtiens le rabattement de deux points d'intersection. Si on relève ces points on aura deux plans qui seront déterminés.

3e Solution.

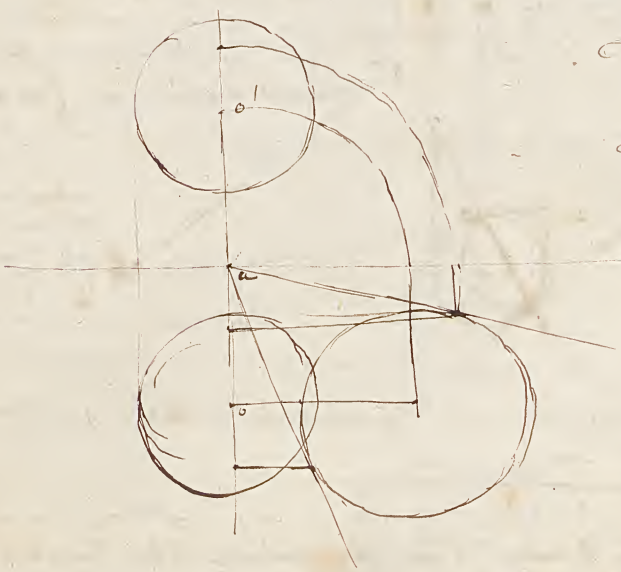


Par le centre de la sphère je conduis un plan perpendiculaire à la droite donnée. Je cherche l'intersection (C, C') de la droite donnée avec ce plan; je rabats ce point autour de la trace horizontale du plan; j'obtiens C'' et de ce point je mène deux tangentes au cercle.

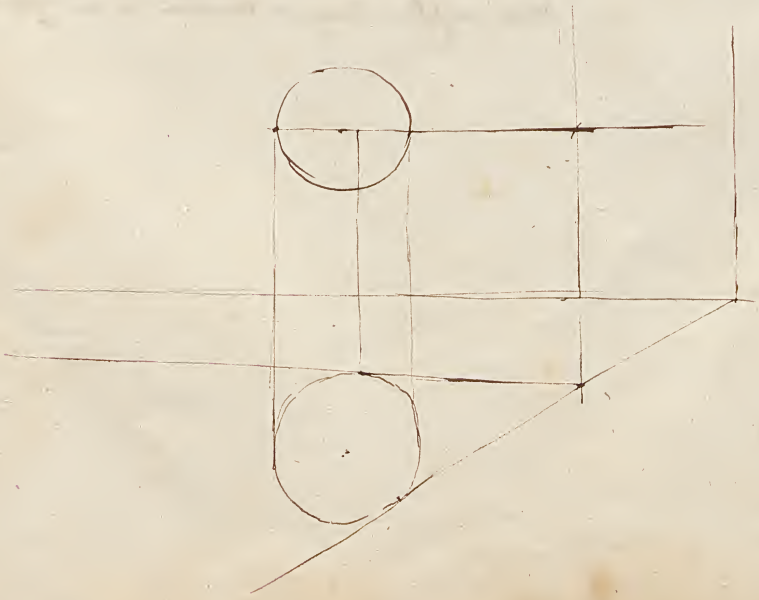
Considérons la tangente C''T j'abaisse TP perpendiculaire sur KO. Si je fais tourner le point C au point D, j'aurai la projection horizontale de la tangente; C'D' sera la projection verticale; alors le point de contact rabattu aura pour projection (m, m'). on déterminerait l'autre point de contact de la même manière.

Mener par la ligne de terre un plan tangent à une sphère donnée — en appliquant la dernière construction.

Je mènerai par le point (o,o) un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Je rabats l'intersection de ce plan avec la sphère, et par le point a je mène deux tangentes au grand cercle rabattu. J'obtiens le ~~rabattement~~ du point a tant qu'il est facile de relever. —



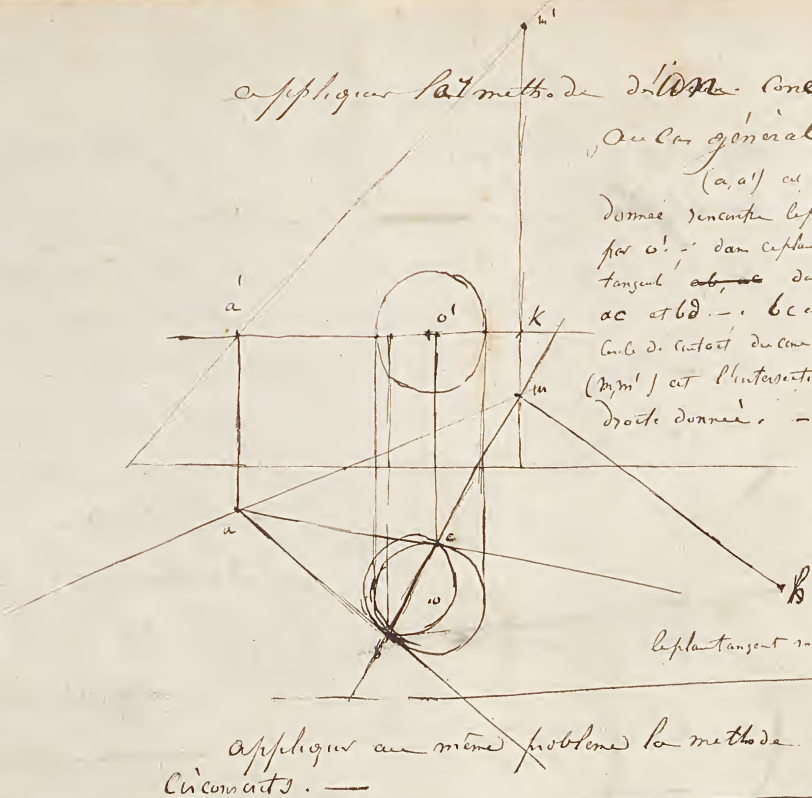
Mener par une droite verticale un plan tangent à une sphère donnée.



appliquer la méthode du cône circonscrit.

Cas général

(a, a') est le point où la droite donnée rencontre le plan horizontal passant par o'. – dans ce plan menons à la sphère les deux tangentes ~~ab, ac~~ dont les projet. horizontales sont ac et bd. – bc est la projet. horizontale du cercle de contact du cône circonscrit et de la sphère. (m, m') est l'intersection de le plan et de la droite donnée. – (mh = km'. –)



on suivra la méthode générale pour le point (m m') on mènera une tangente au cercle de base et on cherchera le point où cette tangente coupe la ligne (bc, a'b').

le plan tangent sera déterminé. –

appliquer au même problème la méthode du cône circonscrit. –

---

déterminer le cône circonscrit à deux sphères données, mener un plan par la ligne des centres. et dans ce plan construisons les deux tangentes ac, bd qui par leur rotation autour de oo' engendrent un cône

~~Menez un plan tangent commun à une sphère et à un cône~~

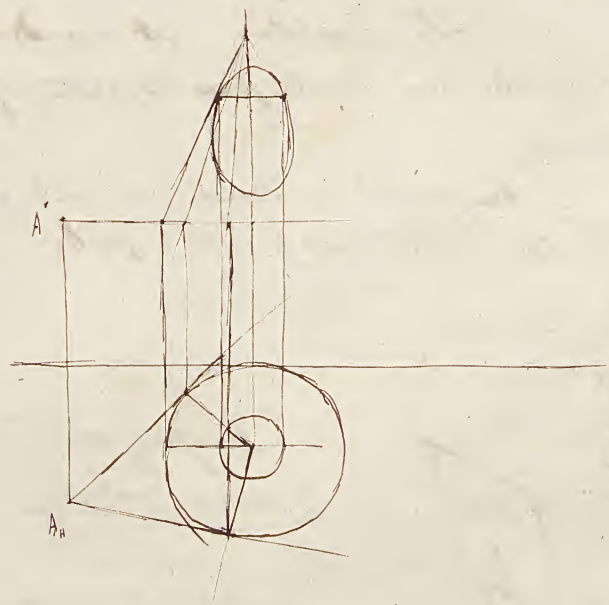
~~à un cône par la méthode qui~~

mener un plan tangent commun à une sphère et à un cône

Mener un plan tangent par une droite à une surface quelconque.

On choisit un point sur la droite et on considère ce point comme le sommet d'un cône circonscrit dont on détermine la courbe de contact; on prend un deuxième point que on considère comme le sommet de 2e cône circonscrit dont on détermine la courbe de contact; l'intersection de la deux courbes sera le point de contact.

Étant donné une surface de revolution et un point entier.



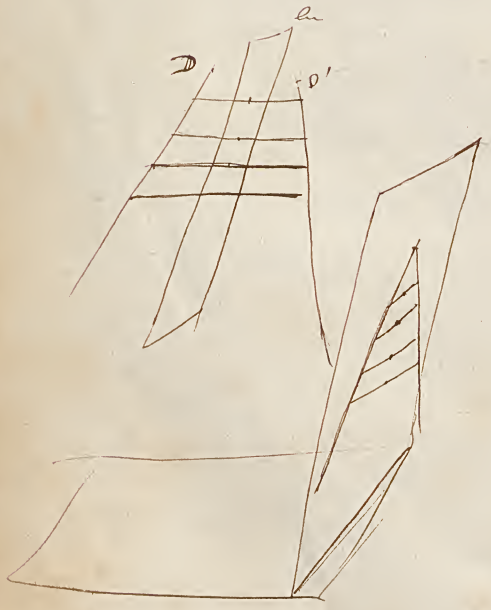
La méthode peut être étendue à un ellipsoïde.

Plan tangent à une surface gauche

Une surface gauche étant donnée, tous les plans tangents le long une même génératrice sont aussi tangents à une surface gauche appelée paraboloïde.

Le paraboloïde est engendré par une droite qui rencontre deux droites fixes et reste parallèle à un plan donné.

Le paraboloïde admet deux modes génération par une ligne droite, celui dont je viens de parler, et un autre que je nommerai



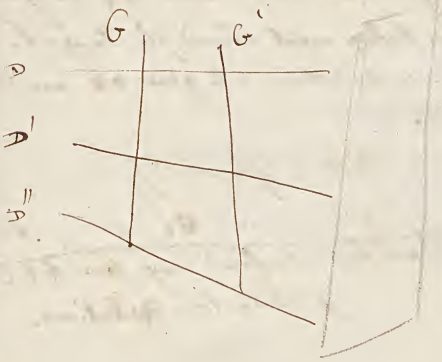
Je projette la figure sur le plan parallèle au plan directeur.

Toutes les génératrices se projetteront suivant des parallèles

Ainsi tout le paraboloïde peut être engendré par une autre droite qui rencontre un autre plan déterminé, et deux quelconques des génératrices

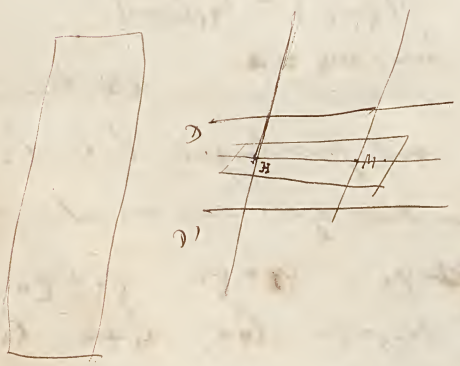
Il peut aussi être engendré par un droite qui en rencontrerait trois autres parallèles à un même plan.

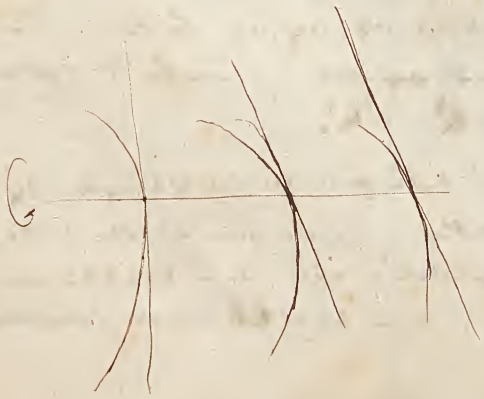
Soit G, G' deux posit. de la generatrice.



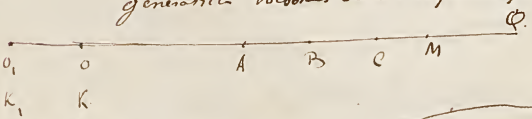
Mener un plan tang. en un paraboloïde, défini par deux directrices et un plan.

Mener le plan tang. au point M. Au point M il passe deux generatrices, qui déterminent le plan, il touche la generatrice du 2d système qui passe en M.





Si deux surfaces gauches ont une génératrice commune si elle ont trois plans tangents communs elle plans tangents seront les mêmes en tous les points de la génératrice. Soit OQ la génératrice commune. Supposons qu'en A, B, C, les deux surfaces aient même plan tangent. Soient O et O_1 les points où se mesurent les plus courtes distances de la génér. OQ avec les deux génératrices voisines dans chaque surface.



Il faut prouver que O coïncide avec O_1 et que $K = K_1$.

Pour la 1re surface ayant pour tangent A, B, C, j'ai les trois égalations.

$$tg\,\varphi = K l.$$
$$tg\,\varphi_1 = K(l_1)$$
$$tg\,\varphi_2 = K(l_2)$$

Pour la 1re surface ou sait que le plan tang. au point M quelconque se détermine par un certain angle φ, lequel angle φ est déterminé par $tg\,\varphi = K\,OM$ ~~[illegible]~~ et K étant le module du système d'angles de 2 gén. vois. à leur plus courte distance.

Pour la deuxième surface, le plan tang. au point quelconque M est déterminé par l'angle φ ; et on a la relation $tg\,\varphi = K_1 \times O_1M$

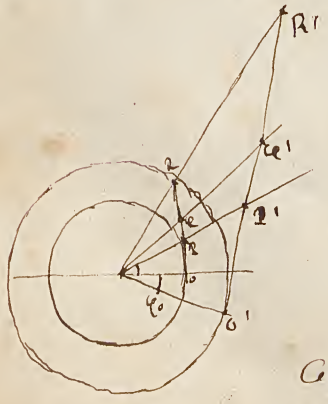
Pour la 2e surface si on désigne par φ_0 l'angle du plan tang. en O à la 1re surface et du plan tang. en O_1 à la deuxième surface j'aurai

$$tg(\varphi+\varphi_0) = K_1(l+a)$$
$$tg(\varphi_1+\varphi_0) = K_1(l_1+a)$$
$$tg(\varphi_2+\varphi_0) = K_1(l_2+a)$$

en faisant $OO_1 = a$

Les 3e égalités signifient que dans un certain cercle les angles $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ ont pour tangent l, l_1, l_2.

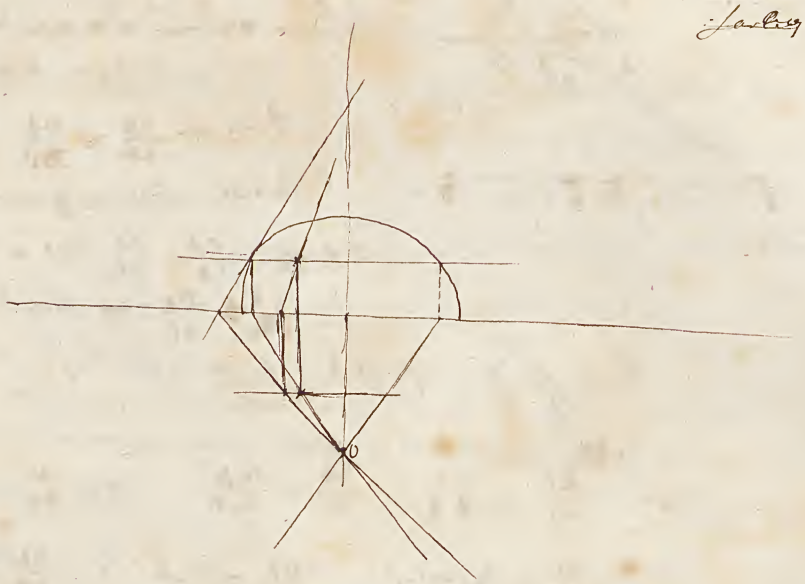
Les deux dernières égalités montrent que dans un autre cercle les angles $\varphi+\varphi_0$, $\varphi_1+\varphi_0$, $\varphi_2+\varphi_0$ ont pour tangentes $l+a$, l_1+a, l_2+a.



Soient OP, OQ, OR les tang. pour le 1er syst. ~~soient OP', OQ', OR'.~~ Pour le 2e système elles seront OP', OQ', OR'.

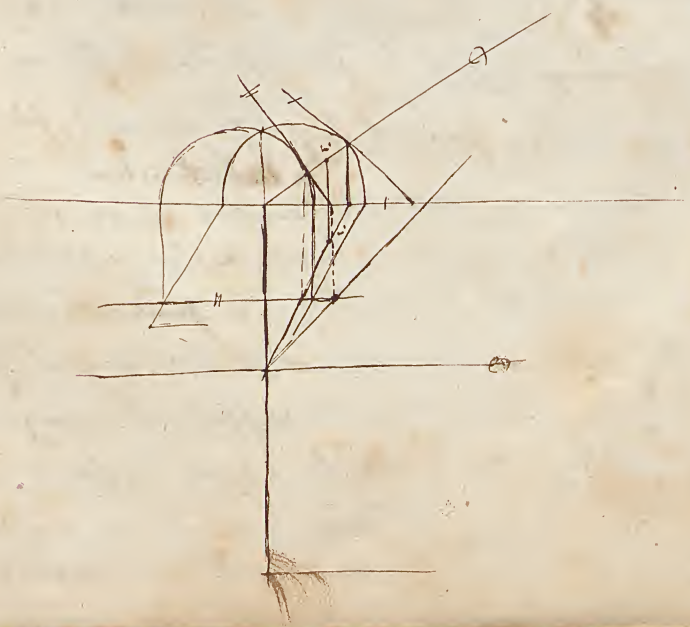
Il suit de là qu'on aurait $QR = Q'R'$, $PQ = P'Q'$ ce qui est impossible. Supposons qu'on ait $AB = ab$, $BC = bc$. Le même $\alpha\beta\gamma$ parallèle à abc. on a $B\alpha : B\beta :: ab : bc$ ou $B\alpha : B\beta :: AB : BC$. donc $A\alpha$ et $C\gamma$ seraient parallèles.

Cone droit,
Surbaissé

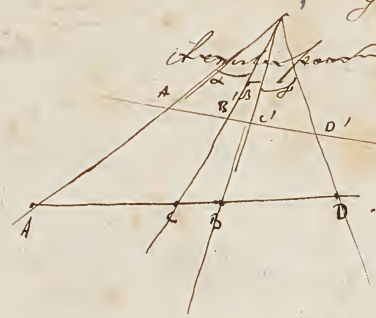


Mener un plan tang. en un point —

Surface du bien-paté.



avant de parler de l'hyperboloïde explosions quelques principes de géométrie.



Exposition pour l'hyperboloïde deux modes de génération.

Si on a les points A, B, C, D en ligne droite

Si on a $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$, la droite est divisée harmoniquement.

alors $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = 1$ et le rapport harmonique

si $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = m$ le rapp. est anharmonique.

Si on prend un point S. si on joint les points A, B, C, D avec un point qlq. S, si on mène une autre droite A, B', C', D', le rapport anharmonique des points est égal au rapport anh. du premier

on aura $\frac{AC}{CS} = \frac{\sin\alpha}{\sin A}$. $\frac{CB}{CS} = \frac{\sin\beta}{\sin B}$. d'où $\frac{AC}{CB} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \times \frac{\sin B}{\sin A}$.

$\frac{DA}{DS} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin A}$. $\frac{DB}{DS} = \frac{\sin\gamma}{\sin B}$ d'où $\frac{DA}{BD} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin B}{\sin A}$.

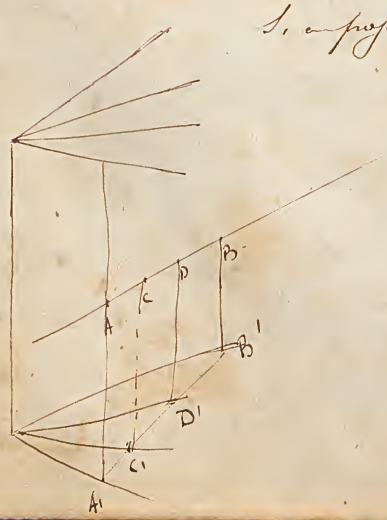
d'où $m = \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin\beta \sin(\alpha+\beta+\gamma)}$. donc m est constante.

Donc etc —

Corollaire: Si on a un faisceau de 4 droites, il existe pour ce faisceau un certain rapport anharmonique.

Ceci convient évidemment à 4 droites parallèles.

Si 4 pl. passent par une même droite, le faisceau a un rapport anharmonique; si on coupe ce faisceau par une droite quelconque



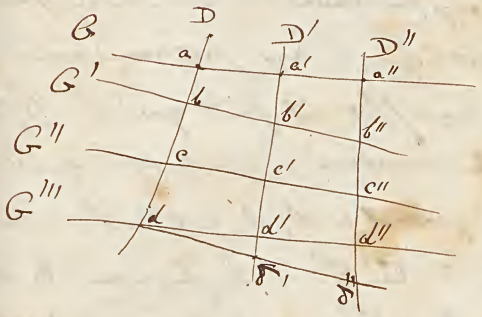
si on projette les points sur un 5e plan perpendiculaire à leur intersection.

Soient OA', OC', OD', OB' les intersect. de ces plans avec le plan perpendiculaire

les points A, B, C, D se projettent en A', B', C', D'. Ces points ont même rapport anharmonique que A', B', C', D'.

or le rapport des points A', B', C', D' est constant donc ——— donc un faisceau de 4 plan a un rapport anharmonique constant. —

Etant données trois directrices d'une surface quelconque L, L', L'' si on mène les génératrices c.a.d. les droites qui rencontrent les trois directrices, les rapports anharmoniques faits sur chacune de celles-ci respectivement, entre les points de rencontre avec les quatre autres droites seront égaux entre eux.



Le rapport anharmonique des points a, b, c, d est égal au rapport anharm. des points a', b', c', d' et des points a'', b'', c'', d''.

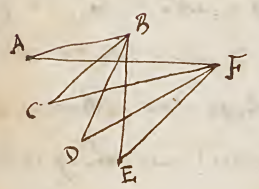
En effet les 4 droites G, G', G'', G''' déterminent 4 plans passant par la droite D. Les quatre points a', b', c', d' étant les intersections de ces plans par la droite D', leur rapport anharmonique est égal à celui des plans; de même le rapport anharm. des points a'', b'', c'', d'' est égal à celui des 4 plans. etc —

Si je considère maintenant la droite G, G', G'', G''', qui s'appuie sur les deux droites D, et D' non situées dans le même plan, et telle que le rapport anharm. des 4 points situés sur D est égal au rapport anharm. des 4 points situés sur D', les 4 droites jouiront de cette propriété que toute droite qui rencontrera trois d'entre elles, rencontrera la quatrième.

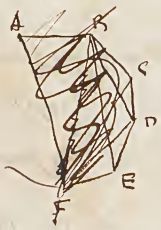
Je mène D'' qui s'appuie sur G, G', G''. Je dis qu'elle rencontrera G'''. Car si par le point d je mène une droite qui rencontre D' et D'', elle rencontrera D' en un point d' telle que le rapport anharm. des points a', b', c', d' sera égal à celui des points a, b, c, d. donc d' se confond avec d'. donc DD' rencontre D''; ×

L'hyperboloïde est engendré par une droite qui en rencontre trois autres non parallèles à une même plane —

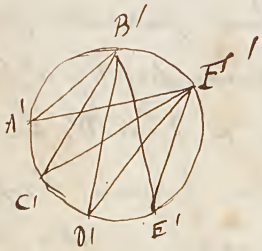
Donc dans l'hyperboloïde il y a encore deux syst. de génératrices rectilignes, par chaque point de la surface il y a deux génératrices rectilignes qui forment de l'autre plan tangent en un point de la surface —



La section faite par un plan est toujours une courbe du 2e degré. pour que ce soit une section conique, il faut que 6 points q.l.q. appartiennent à une même section conique. quelle est la condition pour que cela ait lieu soient 6 points A, B, C, D, E, F. ; je joins les points B et F à tous les autres. j'obtiens ainsi deux faisceaux : La condition pour que ce soit une conique est que les deux faisceaux aient même rapport anharmonique. En effet il faut que les 6 points soient sur un cone à base circulaire. je suppose que les

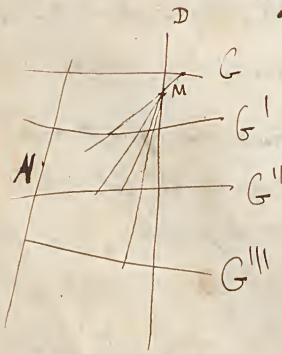


génératrices qui passent en A, B, C, D E F, rencontrent la base en A', B', C', D', E', F'. les faisceaux B et F se projettent en B' et F'. or les faisceaux ~~projetés~~ B et F, ont chacun même rapport anharm. que B' et F'. mais B' et F' ont même rapport anharmoniq.



Donc etc —

Ceci posé je prends 6 points situés sur la section. 4 sur 2 génératrices et 2 sur 2 directrices. Soient M, N, les points pris sur les deux directrices.



je joins M avec les points pris sur la génér. j'obtiens ainsi un faisceau de 4 droites. ce rapport est le même que le rapport anharm. de 4 plans passant par D et G, G', G'', G''', ou que le rapport anharm. de 4 droites G, G', G'', G'''. le faisceau partant de N aura même rapport anharm. que celui des 4 droites G, G', G'', G'''. Donc les 6 points se trouvent sur une conique.

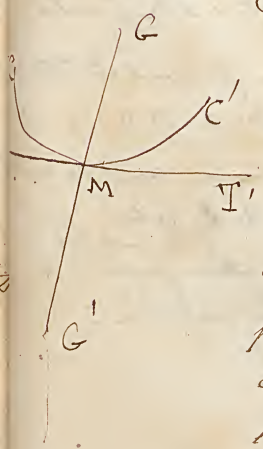
Si on considère une génératrice de surface gauche si on élève des normales entre les points, les normales formeront une surface gauche qui est le paraboloïde hyperbolique. Si je fais mouvoir une droite sur trois de ces ~~génératrices~~ droites on aura le paraboloïde de raccordement. Si en un point M quelconque, je mène un plan tang. au point M je mène une perpendicul. à G, elle sera comprise dans le paraboloïde de raccordement

Je suppose que coupe la surface par des plans parallèles et que je mène les tangentes aux points d'intersection des courbes et de G

Mener un plan tang. à une surface gauche par une droite extérieure.

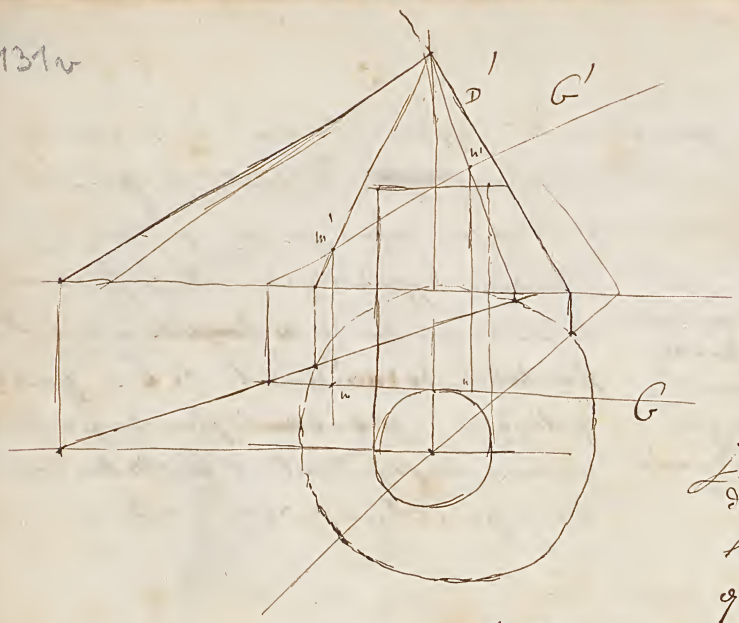
Supposons que l'on trouve le point où la droite donnée rencontre la surface gauche, par ce point passe une génératrice. Si par la droite donnée et la génératrice on fait passer un plan ce plan sera le plan tangent; car on sait que un plan ~~tangent~~ passant par une génératrice est tangent en un certain point.

Pour avoir le point de contact il faut chercher la courbe d'intersection de ce plan avec la surface entière et la génératrice qu'il contient. Le point de contact est le point d'intersection de cette courbe et de la génératrice. ainsi ~~a la figure~~ le point de contact est le point M, intersection de la génératrice GG' et de la second courbe d'intersection CMC'.



Pour déterminer l'intersect. de la droite et de la surface on mènera par la droite un plan, et on cherchera l'intersection de ce plan avec la surface gauche, en construisant l'intersect. de ce plan avec chaque génératrice; on aura une courbe; cette courbe rencontrera la droite donnée en un certain point qui sera le point d'intersection

MATIGNON.



Intersection d'un hyperboloïde avec une droite D, D' qui rencontre l'axe.

La droite (D, D') entourant autour de l'axe engendrera un cone; et l'inter. de ce cone et de l'hyperbol. sera un cercle; si ce cercle était connu, il suffirait de déterminer l'intersection de ce cercle et de la droite (D, D').

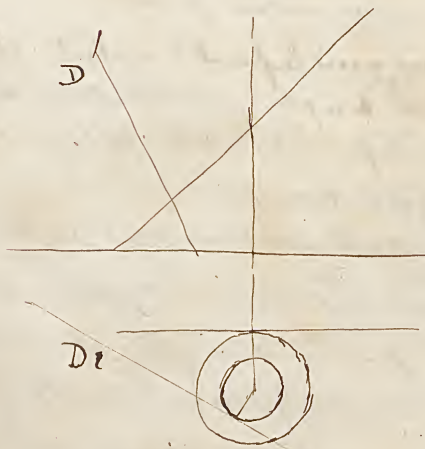
Je vais chercher l'intersection de ce cone et d'une generatrice. Par le sommet et la generatr. je fais passer un plan qui coupe le cône suivant deux generatrices

on cherche leur intersection avec la generatrice de l'hyperboloïde.

(m, m') et (n, n') sont les points d'intersection de la generatrice de l'hyperboloïde avec le cone. — cherche a construire l'intersection de la droite donnée avec les parallèles dont fait partie les points (m, m') et (n, n'); on aura ainsi le point d'intersection cherché. —

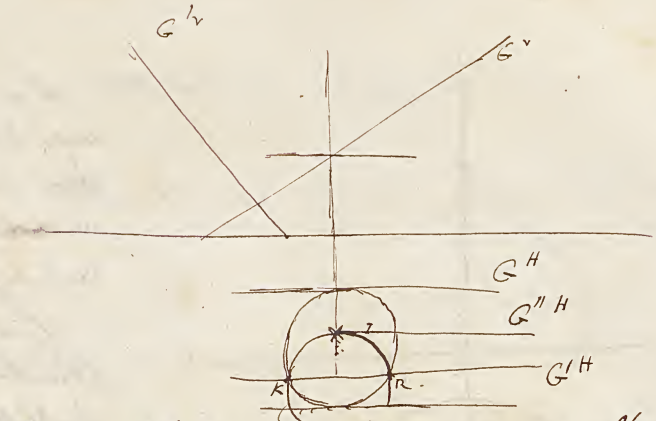
Cas ou la droite ne rencontre pas l'axe.

On ramene ce cas au précédent.



on ramene la question a trouver l'intersection de deux hyperb. ayant meme axe; ce sont deux cercles.

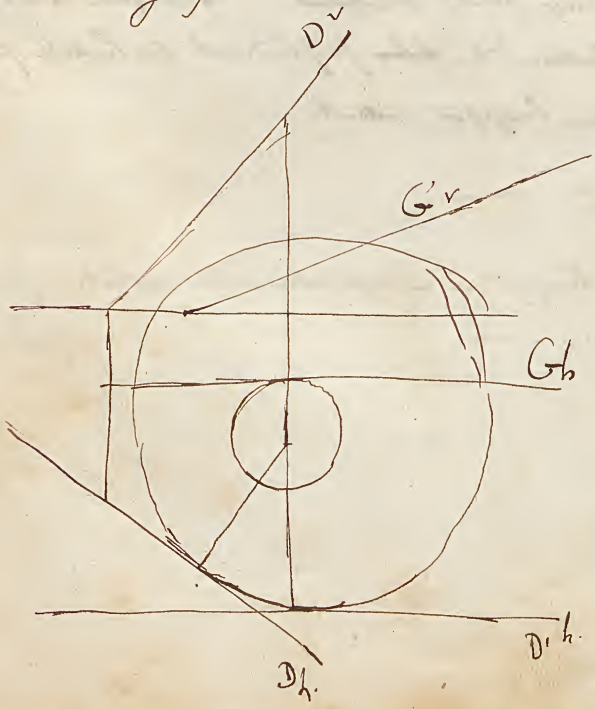
on pourra substituer a la droite D, D' qui nous considère comme la gener. d'une hyperbol., une generatrice parallèle au plan vertical. —



usuelles données.
(G^H, G^V) general du 1er hyperbolo. et (G'^H, G'^V) génératrice du 2e hyperbol. le plan $G'^H K$ coupe le prem. hyperb. suivant une hyperbole; dont l'axe transverse est KR. en projetant l'axe et l'asymptot. tout les mêmes que ceux de l'hyperbole principale.

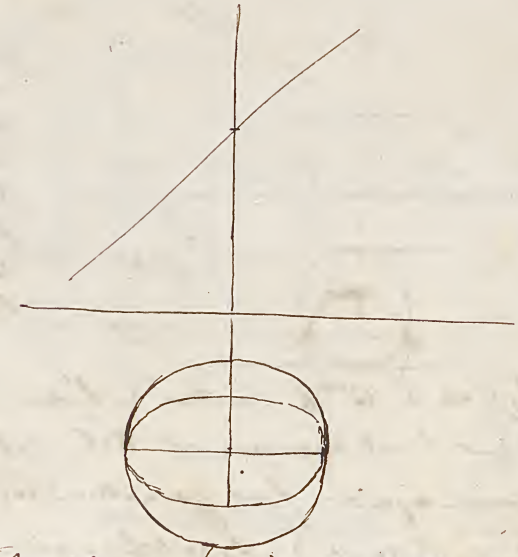
Si on fait tourner l'hyperbole de $G'^H K$ autour de l'axe imaginaire, on aura un hyperboloïde dont le cercle de gorge est RIK. cet hyperboloïde peut être considéré comme ayant pour génératrices G'^h et G'^v; on voit qu'il s'agit alors de chercher l'intersect. d'un hyperboloïde avec une droite qui passe par l'axe (G'^h, G'^v)

Il y a un autre méth. de semblable en défaut. C'est celle où la droite donnée G'^h ne rencontrerait pas le cercle de gorge. alors on ne connaîtrait pas l'axe réel



Je remplace D_h D_v par D'_h, D'_v. le plan D'_h coupe l'hyperboloïde donné suivant une hyperbole; seule l'axe imaginaire est devenu réel, et l'axe réel est devenu imaginaire

Maintenant je cherche l'intersection de (G) avec l'hyperboloïde (D), au lieu de chercher l'intersection de (D) avec l'hyperbole (G)



La méthode s'applique aussi à un hyperboloïde défini par une asymptote et un ~~cercle de gorge~~ ellipse pour cercle de gorge.

Les sections faites par des plans horizontaux sont des ellipses semblables toutes transformées en cercles ~~par~~ en augmentant leurs ordonnées dans le même rapport. On pourra donc ramener facilement

de la surface donnée à une surface de révolution, ~~en construisant les intersections de la droite donnée avec la surface de révolution~~. De la droite donnée j'abaisse de chaque point du perpendicule sur la section principale et j'aurai un autre droite; je chercherai l'intersection de cette droite avec la surface de révolution, j'aurai ainsi deux points qui correspondront aux deux points d'intersection de la surface donnée. Des ces deux points j'abaisserai des plans perpendiculaires sur la section principale et je les réduirai dans le rapport constant.

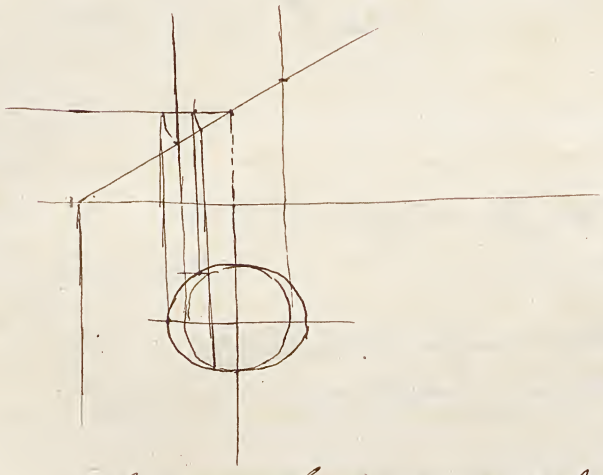
Mener un plan tangent à un hyperboloïde de révolution par une droite extérieure.

Intersection de surfaces —

Intersect. d'une surface par un plan.

Cas du cylindre. La méthode générale consiste à chercher l'intersect. du plan par chacune des génératrices de la surface.

Cas



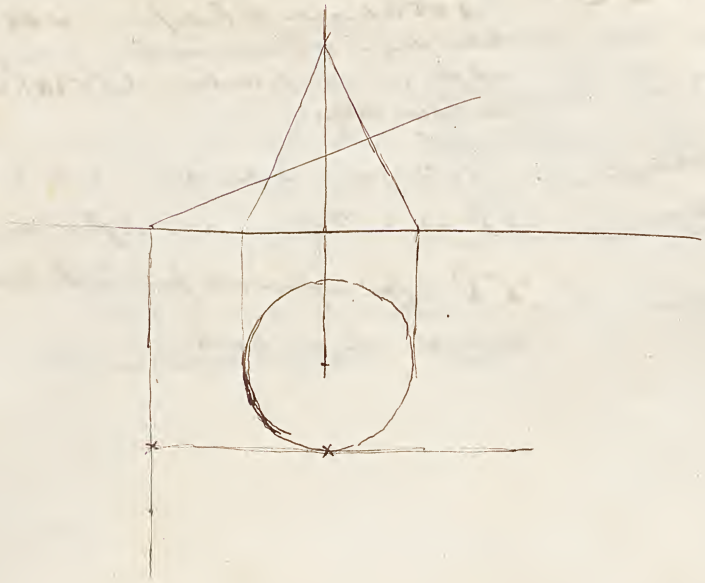
Si la courbe proposée est un cercle la courbe d'intersection sera une ellipse

tangente à cette courbe : la tang. est l'intersect. du plan tang. et du plan sécant.

133 v

Un cylindre étant coupé par un plan, le développe la surface, il s'agit de trouver le développement de la courbe d'intersection.

Développement du cône



Déterminer le point d'inflexion du développ. si il existe.

Il faut chercher le point de l'ellipse pour lequel le plan tangent au cone est perpend. au plan de l'ellipse.

La ligne la plus courte sur une surface ~~est celle dont~~ est qui passe par deux points voisins.

Si par le point A et B je fais passer cercle, la différence entre la corde et l'arc est plus petite que le rayon du cercle ~~lorsque petit~~ est plus grand.

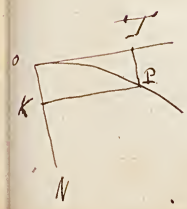
A B

La droite qui unit A et B sera la plus courte sera celle dont le rayon de courbure sera le plus grand.

La droite la courte, est seul supposer qu'elle est point tangente commune A B.

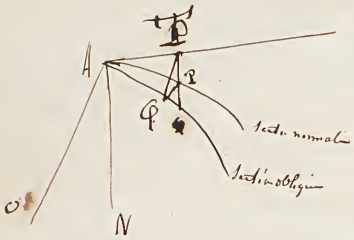
Si la courbe était un cercle on aurait alors la formule

$PK^2 = PI \cdot 2R$. d'où $R = \frac{OI^2}{IP}$



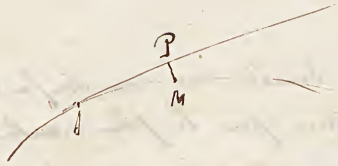
Le rayon de courbure est donc en raison inverse de PT.

Soit AT la tangente à la surface et AN normale. Je fais la section oblique et la section normale. Je dis que la section normale a le plus grand rayon de courbure. Soit TAN la sect. normale ; soit TAO une section oblique.

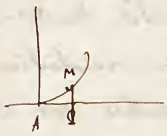


Les rayons de courbure sont en raison inverse de TP et de TQ. Nous allons démontrer que TP < TQ.

Or TP diffère infiniment peu de la normale en P et est parallèle à la normale en A.



quand on a une courbe et une tang. au point A. si AM est un infiniment petit du 1er ordre, AP sera un infin. du 2e ordre.

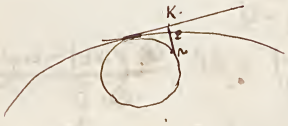


Car si on ~~prend~~ la tang. point au d. x, et A pour l'origine de condon, on aura ~~tonde~~ $\lim \frac{y}{h} = 0$ du MP est infin. relativement à AP.

Il n'y a qu'une seule droite qui jouisse de cette propriété.

~~Conséquence importante~~ — ~~car~~

Cercle osculateur. — a le même caractère.



Parmi ces cercles il y en a qui a un contact du 2e ordre —

. prenons une courbe à double courbure et un tang.

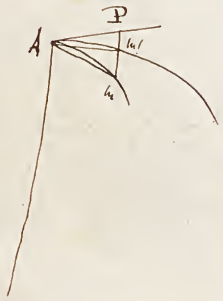
Si on fait tourner un plan autour de OT la distance de la courbe au plan sera au moins du 2e ordre; mais parmi ces plans il y en a un dont la distance à la courbe est un infin. petit du 3e ordre —.

Si on considère x, y, z, comme fonct. d'une variable t.

$x = \varphi(t)$
$y = \psi(t)$ — Ces plans osc. contient $x + dx$ $x + d^2x$
$z = \chi(t)$ $y + dy$ $y + d^2y$
$z + dz$ $z + d^2z$

Si, sur une courbe tracée sur une surface, et qu'on coupe la surface par le plan osculateur à la première courbe, on aura une courbe dont la distance à la première courbe sera un infini petit du 3e ordre. Ces deux courbes ont donc même cercle osculateur; car tout cercle dont la distance à l'une des courbes est un infini petit du 3e ordre dont la distance à l'autre courbe sera un infini du 3e ordre.

L'arc AB sera d'autant plus petit que le rayon de courbure sera plus grand.



$$AM' = \frac{AP}{\cos\varphi} \qquad AM = \frac{AP}{\cos(\varphi+\varepsilon)}$$

$$AM' - AM = AP\left(\frac{1}{\cos\varphi} - \frac{1}{\cos(\varphi+\varepsilon)}\right) = AP\,\frac{\cos(\varphi+\varepsilon) - \cos\varphi}{\cos\varphi}$$

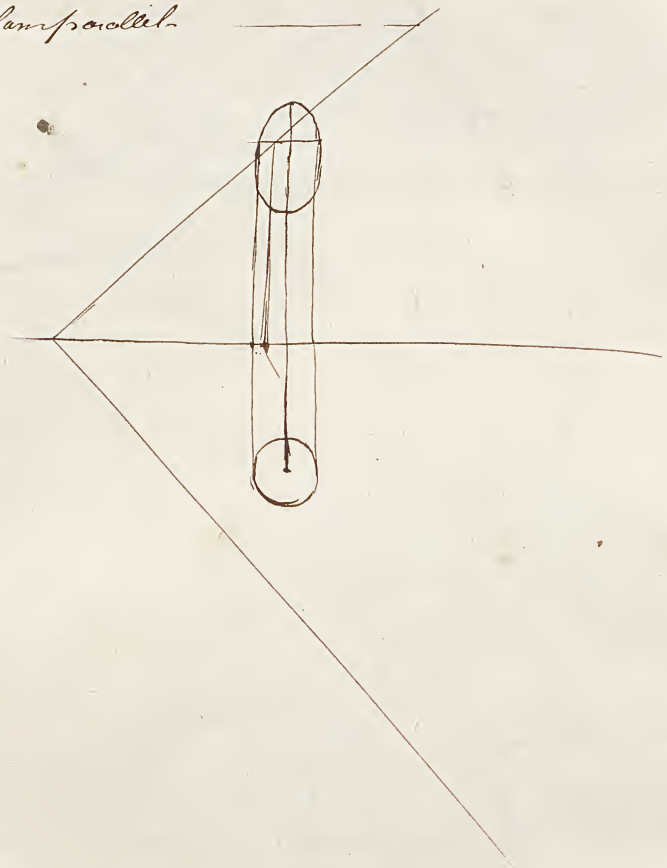
$$= AP\cdot\left(\cos(\varphi+\varepsilon) - \cos\varphi\right).$$

$$= AP.\ \sin\left(\varphi+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\frac{\varepsilon}{2}.$$

136

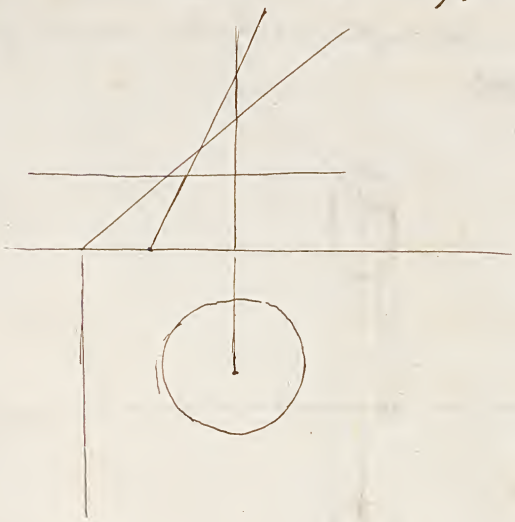
136 v

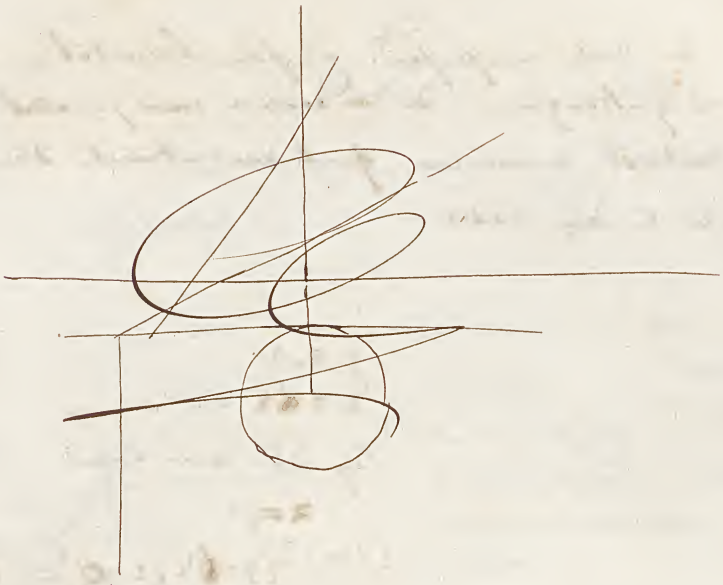
Intersect. d'une surface de revolution par un plan
on coupera la surface et le plan sécant par une série de
plans parallèles

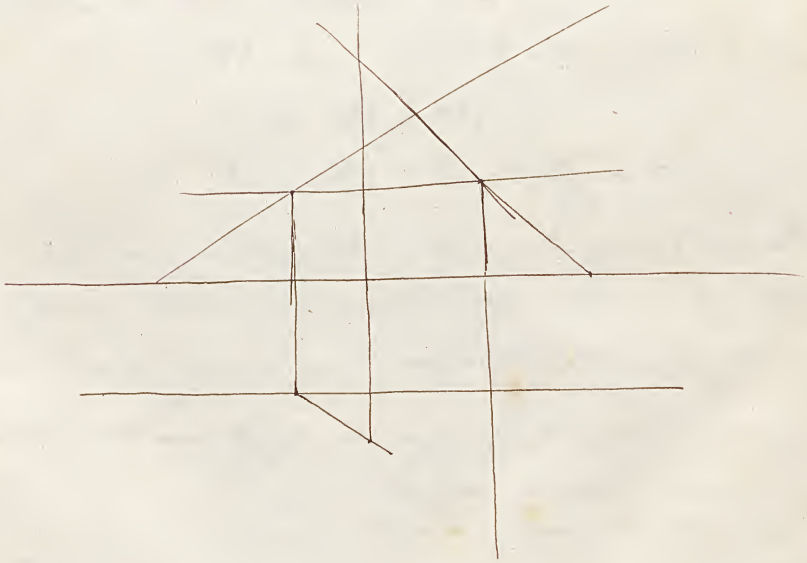


137 v

intersect. de l'hyperboloïde de revol. par un plan







138 v

une droite perpend. au plan horizontal. dont centre est quelconque. du tranchelet ment parallel. au plan vertical de manière que ses deux extrémités d'un diamètre soient sur ces deux droites. —

$y = \beta$

$z = \alpha x$ —

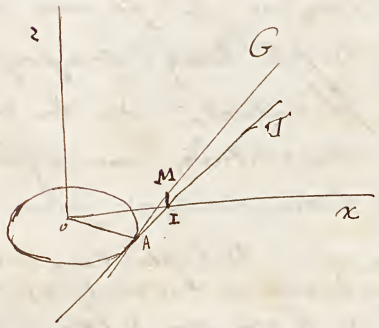
Eq. d'un cercle sera

$z = \gamma$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Hyperboloïde de révolution —

La sect. faite par un plan passant par l'axe est une hyperbole —



La projet. de AG sur le plan du cercle de gorge la projette suivant une tang. au cercle de gorge — 1° par AG je mène un plan perpendi. à OA, ce plan sera perpendi. au pla. du cercle de gorge; (ce sera le plan projet. de AG)

Intersect. de la surface par zOx; ce plan rencontre AG en M; cherchons donc le lieu du point M.

on a $MI = z$ $\quad IO = x$. or

$$z = AI \operatorname{tg} MAI.$$

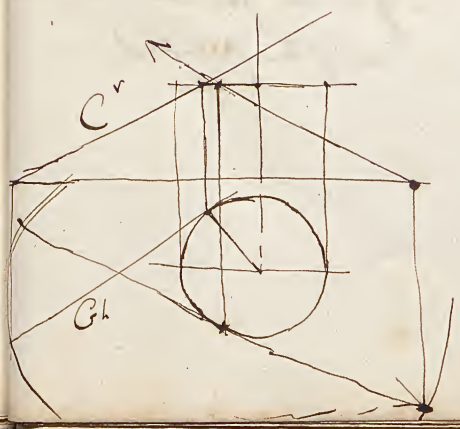
$$x^2 = \overline{AI}^2 + R^2 = \frac{z^2}{\operatorname{tg}^2\alpha} + R^2.$$

C'est bien une hyperbole, car puisque α est constant, puisque AG se meut sans changer la même position —

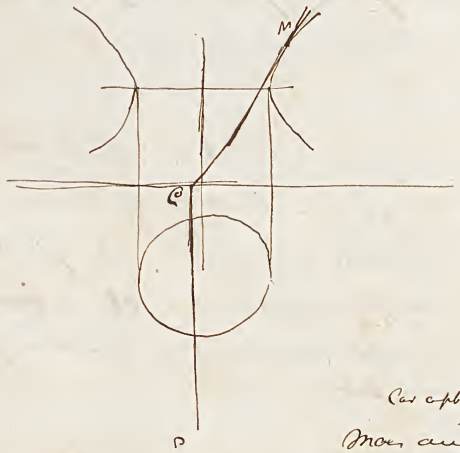
l'axe de z est un axe imaginaire —

Sont représentat. graphique —

Lorsque ainsi étant donné, on peut déterminer tous points —



La generatrice en projet. vertical sera toute tang. à l'hyperbole méridienne. —

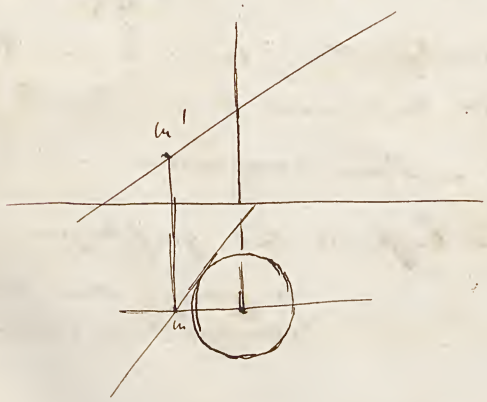


Du m. surf. de revol. le plan tang. est perpend. au pl. merid. : si on considere le pl. mer. pl. à celui qui contient le pt. tang. sera perpend. au pl. vertical ; donc la droite qui y sera tirée sera aussi pour proj. verticale tout aussi le plan

Or pour M le plan tang est donc MCD
Car ce pl. est perpend. au pl. vertical est donc la tang. au meridien.
Mais aussi pour M la gen. qui y passe est dans le pl. tang. donc elle est dans MCD ; et elle est donc projet. vertical de la tang. MC

—

La generatrice est aussi donc droite sur le point de contact -

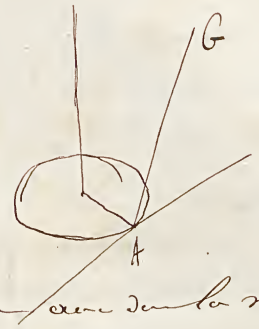


Le point de contact est M, M
C'est le point où la generatrice coupe le plan meridien parallele au plan vertical -
pour l'asymptote il faut que le point de contact soit à l'infini, c'est à dire que la generatrice soit parallele au plan vertical — —

Il a une autre série de génératrices distinctes des précédentes —

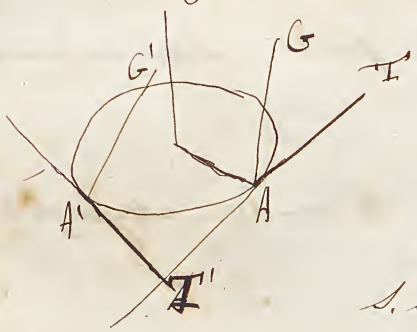
Suppos. de AG,	un droite symétrique cette surface le même angle
que AG	avec le cercle de gorge

mais que l'espace a dessus au lieu de la force au dessus. car on aura toujours $y^2 = \frac{x^2}{\sin^2\alpha} = R^2$ — on aura donc la même surface



Il y a donc deux génératrices —

La générat. d'un même système ne se confond jamais



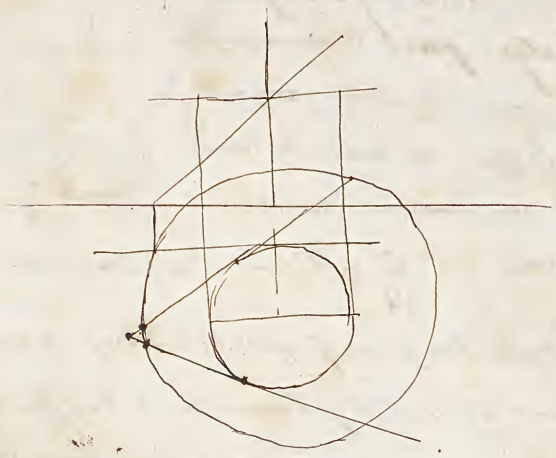
Soient deux génér. G, G'. où les génér. sont du même système, les pt. AG, A'G' sont situés au dessus du cercle de gorge — elles ont donc pour projet. AT, et A'T'. à partir du point A et A' la projet. se confond avec la

Si les générat. étaient du syst. différents, elles se confondraient à un point dans la projet. et T' —

On peut représenter en dessin seul la générat. de ce système —

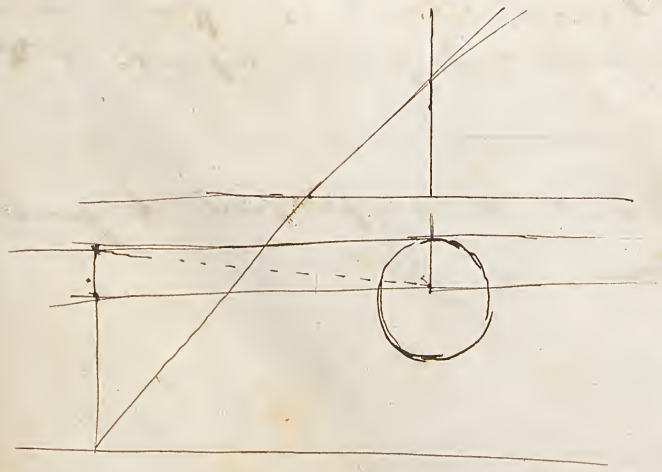
140v

Plan tangent. —



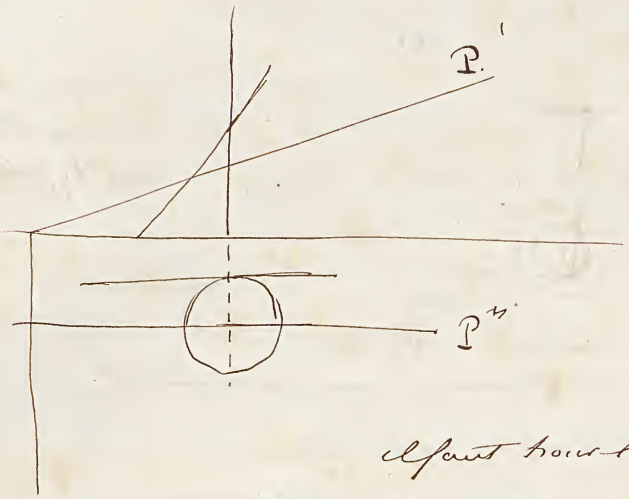
Soit la proj. horiz. d'un point situé au dessous du cercle de gorge — —

Cette surface a un cône asymptote —



Intersect. d'un hyp. d. - rev. ol par un plan —

Déterminer le sommet.



Le sommet sera l'intersection de la droite avec la droite P P' qui rencontre l'axe. —

~~Comme dans~~

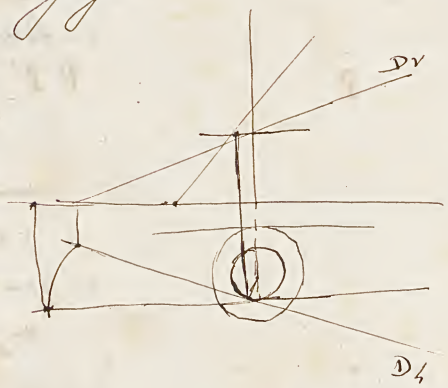
~~Chacun~~

Cette droite est bien engendrant un cone qui coupe l'hyp. suivant la courbe sur laquelle se trouve le point cherché. —

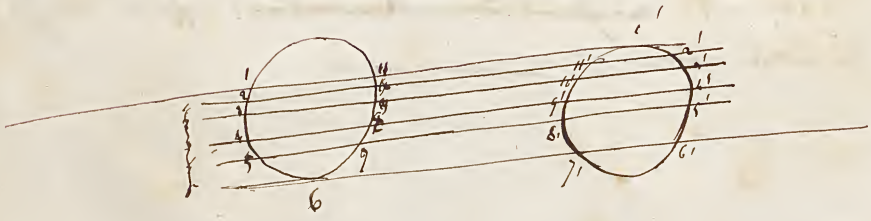
Il faut trouver l'int. d'un cone de l'hyp. avec un cone —; pour cela on fait passer un ~~droite~~ plan par la droite et le sommet du cone. ~~Cet plan~~ Ce plan coup. le cone suiv. 2 génér. — . et ~~coup~~ coup. la droite donnée. ~~on peut dans l'annexe~~ ce prob. a deux sol. —

intersection d'un hyperb. donné par une droite quelconque — — —

Supp d'abord que la projet. horiz. coupe le cercle de gorge — —

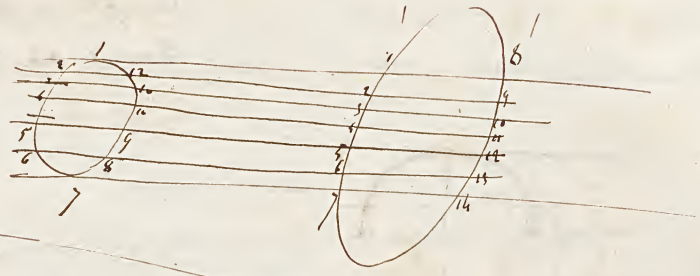


ou s'amène la quest. à chercher l'intersect. de deux hyperboloïdes.



1, 1'
2, 2'
5, 5'
6, 6'
puis 7, 5'
11, 1'
puis 12, 15'
6, 7'
5, 8'

1429 52



Intersection de deux cylindres qui ont même base. — Si la base est une courbe de 2me degré; la 2me courbe d'intersection sera une courbe du deuxième degré! —

1re Courbe complète

1, 1'
2, 2
3, 3
4, 4
5, 5
6, 6
7, 7

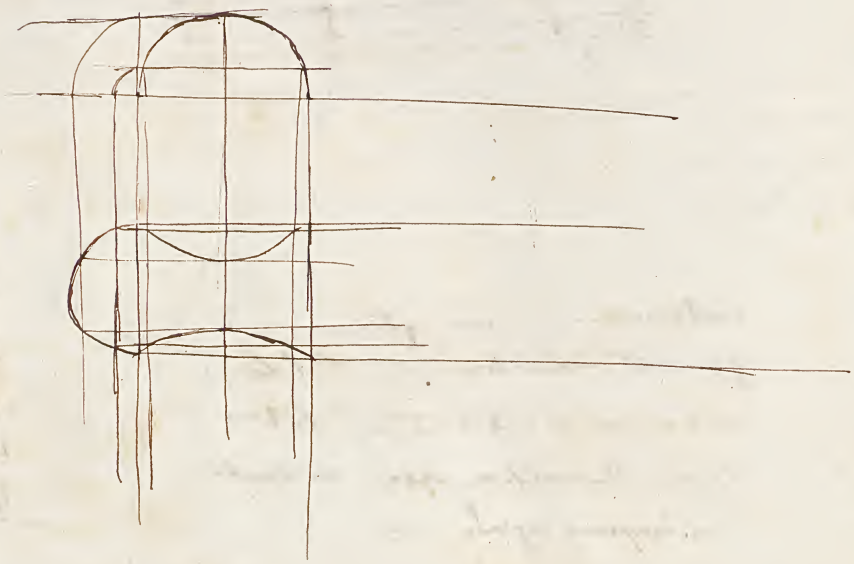
8, 6'
9, 5
10, 4
11, 3
12, 2
1, 1

2e Courbe

1, 8

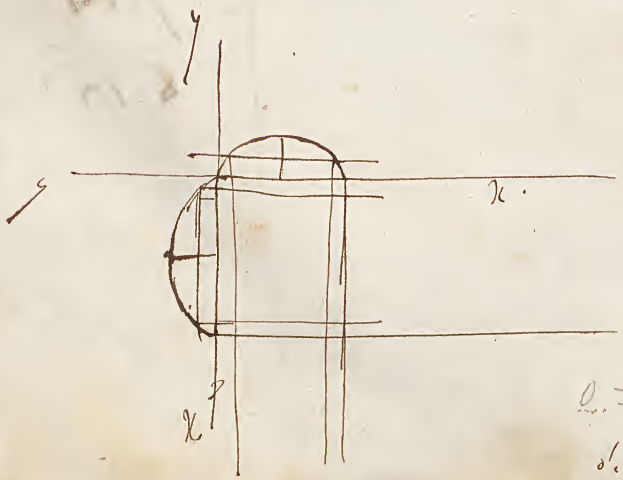
7, 1'
8, 12'

Les deux cylindres sont parallèles au plan vertical ~~et horizontal~~ leur direction est rectangulaire



Ici le plan ~~vertical~~ vertical et horizontal

Supposons que les deux bases ~~de~~ soient deux ellipses et que les voûtes aient même hauteur ; les projections horizontales sont deux droites



$$a^2y^2 + b'x^2 - 2ab'x = 0$$
$$a'^2y^2 + b'x'^2 - 2a'b'x' = 0$$

$$y^2 = \frac{2b'}{a}x - \frac{b'}{a^2}x^2$$
$$y^2 = \frac{2b'}{a'}x' - \frac{b'}{a'^2}x'^2.$$

d'où

$$0 = 2b'\left(\frac{x}{a} - \frac{x'}{a'}\right) + b'\left(\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

d'où $\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}$; donc le lieu des points est une droite —

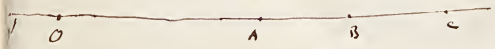
Leur cylind. ont même base située dans le plan vertical; la gener. du 1er sont perpendicul. au plan vertical, la gener. du 2e sont une directr. q/q. —

Surface regl. { surfaces gauches —
surfaces développables.

Doubles surfaces développables — Tangent à une même courbe.

Soit les generatr. sont — 1/ rectiligne
Soient deux generatr. de surf. sans rencontre prolongées, prend. de plus courtes distances. —

Ici



143 v.

Intersection de deux cones. —

1, 1'

5, 5'

6, 4'

7, 3'

8, 2'

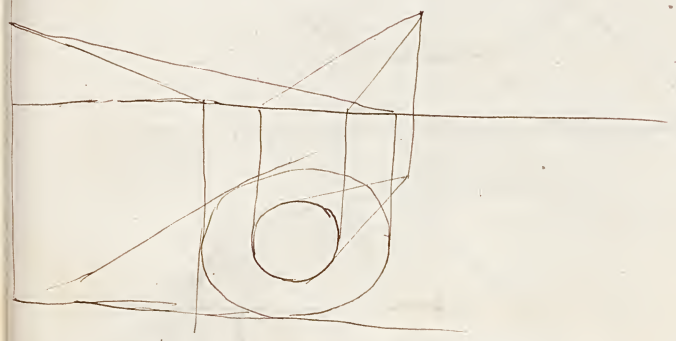
1, 1'

8e Courbe.

1, 10'

5, 6'

La courbe d'intersect. a telle de branches infinies. —
Il faut chercher s'il existe sur le cône de génératrices parallèles



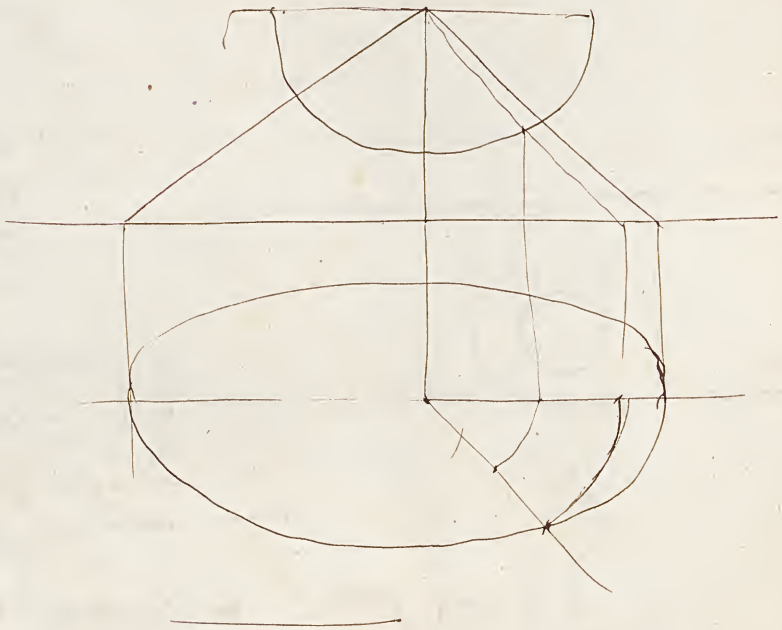
Pour cela faire le sommet de l'un de cônes on mène deux droites parallèles à l'autre : on a alors deux cônes, qui ont même sommet. S'ils se coupent, ils ont même génératrice. et s'ils se coupent suivant des générat. le deux cônes auront des générat. parallèles —

On remarque que la base du nouveau cône est une courbe semblable à.

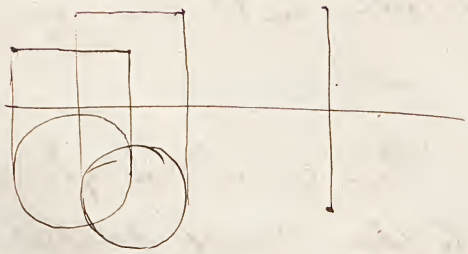
asymptote ; à la regarder comme limite de tang. Il n'y a pas toujours d'asymptotes. — Il y en a pas quand après avoir transporté l'axe, le cône, la base du cône transporté et celle du 2e cône seront tangentes —

Intersection d'un cône et d'un cylindre. — —
on prend les plans sécants parallèles aux génératrices du cylindre et passant par le sommet du cône —

Intersect. d'une sphère et d'un cône concentriques



Deux cônes ayant même sommet

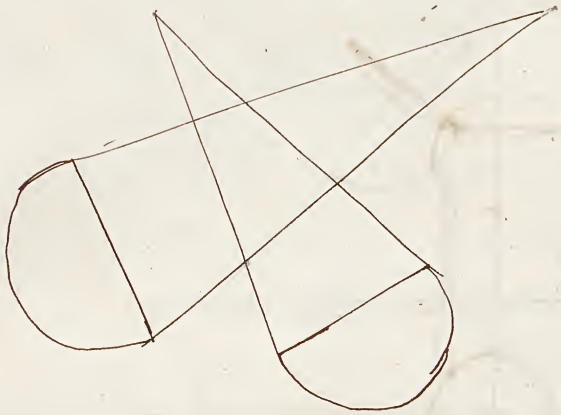


L'intersect. se réduit à deux droites.

Les cônes sont coupés, il faut chercher l'intersect. de l'un des cônes par le plan de la base de l'autre.

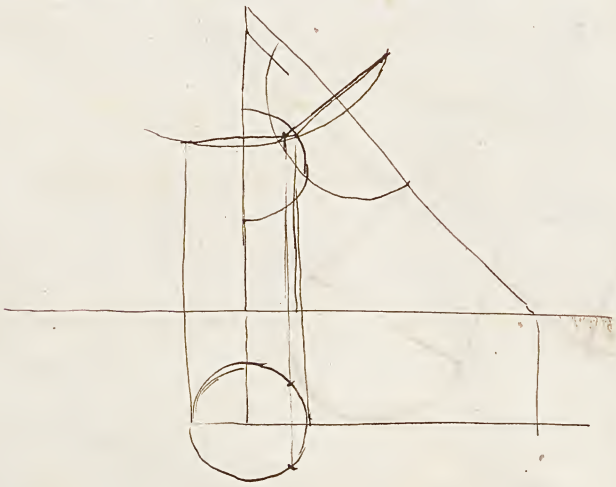
Intersection d. deux cones. —

La somme est situé dans le plan horizontal —
et la base est situé dans le plan vert. coup. —



Intersect. de deux surfaces de révolution —
dont les axes se rencontrent.

on coupe les deux surfaces par une sphère ayant pour centre le point de concours. elle coupera les deux surfaces suivant des cercles. il l'intersection de ces deux sera les points d'intersect.



tang. en un point de la courbe. ici elle est perpendic. à la normale de chacune des deux surfaces. — Chercher du le plan qui contient les deux normales; et pour cela déterminer les deux normales

(on peut remarquer que l'on connaît 3 points du plan des deux normales ce qui permet de déterminer ce plan. —)

---

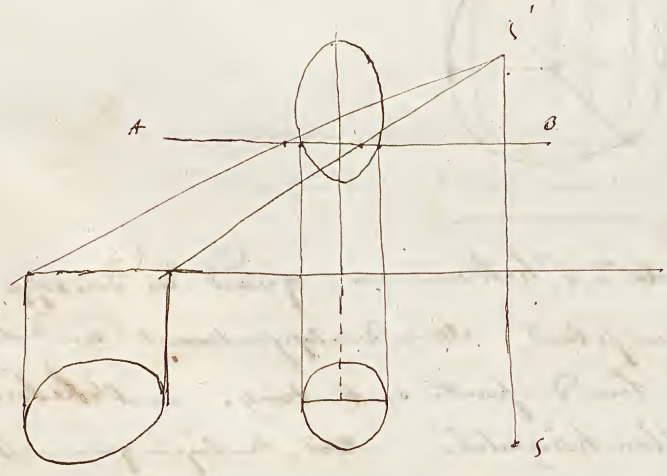
on pourra prendre pour problème de surface l'hyperboloïde de révolut. définie par sa génération —

La méthode est un peu changée; on cherche le parallèle de l'hyperboloïde et on fait passer une sphère par ce parallèle ~~et le point de rencontre des axes~~; son centre étant le point de rencontre des axes —

Je vois même une tangente au hyperboloïde plan de deux normales à chaque surface. —

Je l'ai tangente aux surfaces par une droite extérieure Je l'ai tangent à la sphère —

Intersection d'un cone et d'une surface de revolution —



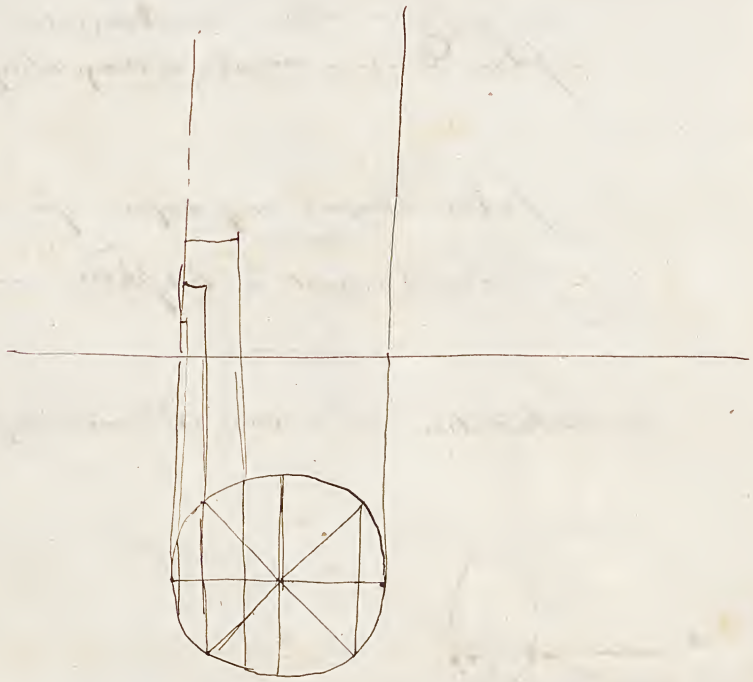
on coupe les deux surfaces par des plans perpend. à l'axe de la surf. de revolution.

on coupe la surface suivant un cercle et le cone donné suivant un cercle semblable à la base, et on considère deux cones qui ont pour sommet (S, S') le sommet du cone donné et pour base la courbe d'intersection du cone par le plan AB et le cercle qui avait lequel la surf. AB coupe la surface de revolution — ces deux cones se coupent suivant une droite sur laquelle se trouvent les points d'intersection —; —

même méthode pour l'intersect. d'un cylindre et d'une surface de revolution —

Helice

construire les deux projets d'une helice —



Tangente à l'helice — quand on developpe un helicoïde sur plan, elle se developpe suivant une droite.

Le lieu des points où les tang. à l'helice percent le plan horizontal est une ligne qui est le developpement du cercle —

tang. à l'helice parallele à une direction donnée.

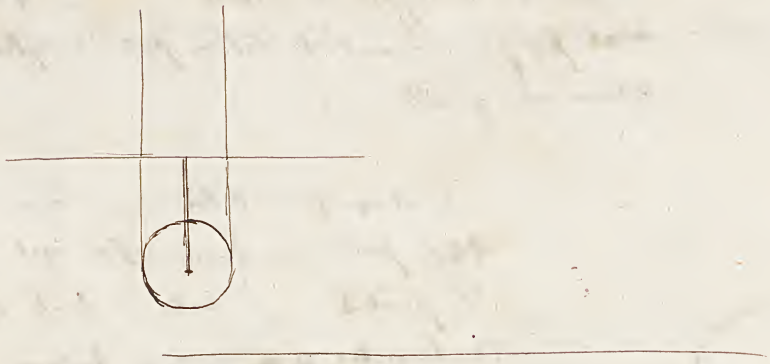
Helicoïde developpable —

un helicoïde developpable coupé par un plan perpendr. à son axe suivant la developpée d'un cercle — : une 2e propriété est coupé suivant des helices par des cylindres qui ont même axe qu'elle —

de chaque point de l'helice je mene une tangente PQ je prends une longueur fixe egale à PI. leur du point I. ; toute droite se projett suivant des tangentes. au cercle de base. : et le point I se projette suivant un cercle concentrique au premier.

Epure — helice — tangente parallele à une droite donnée. — developpée de cercle de base —.

Developpement de l'helicoïde —

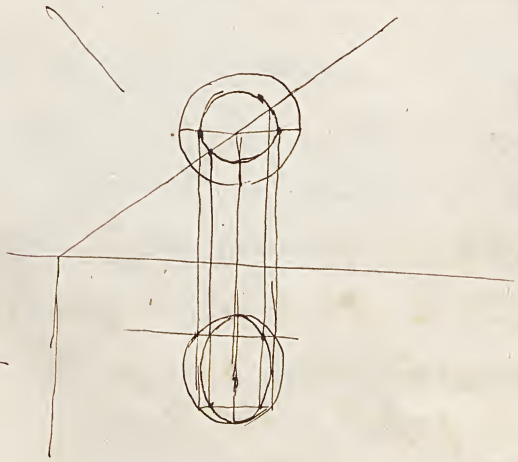


Ombre d'une sphere —

on suppose les rayons lumineux parallèles —

Il revient à circonscrire un cylindre à une sphere;

~~Prenons-nous~~ Je suppose d'abord les rayons lum parallèles au plan vertical. —



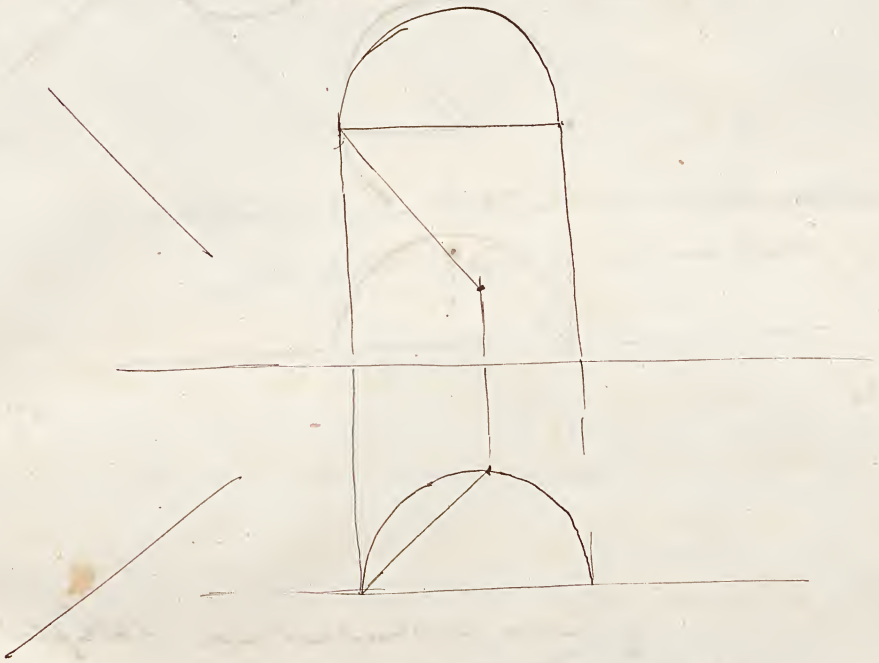
Si on mene par le centre un plan perp au ray. lumineux; ce plan coupera la sphere suivant la ligne de section

—

ombre portée par la sphère sur le plan horiz

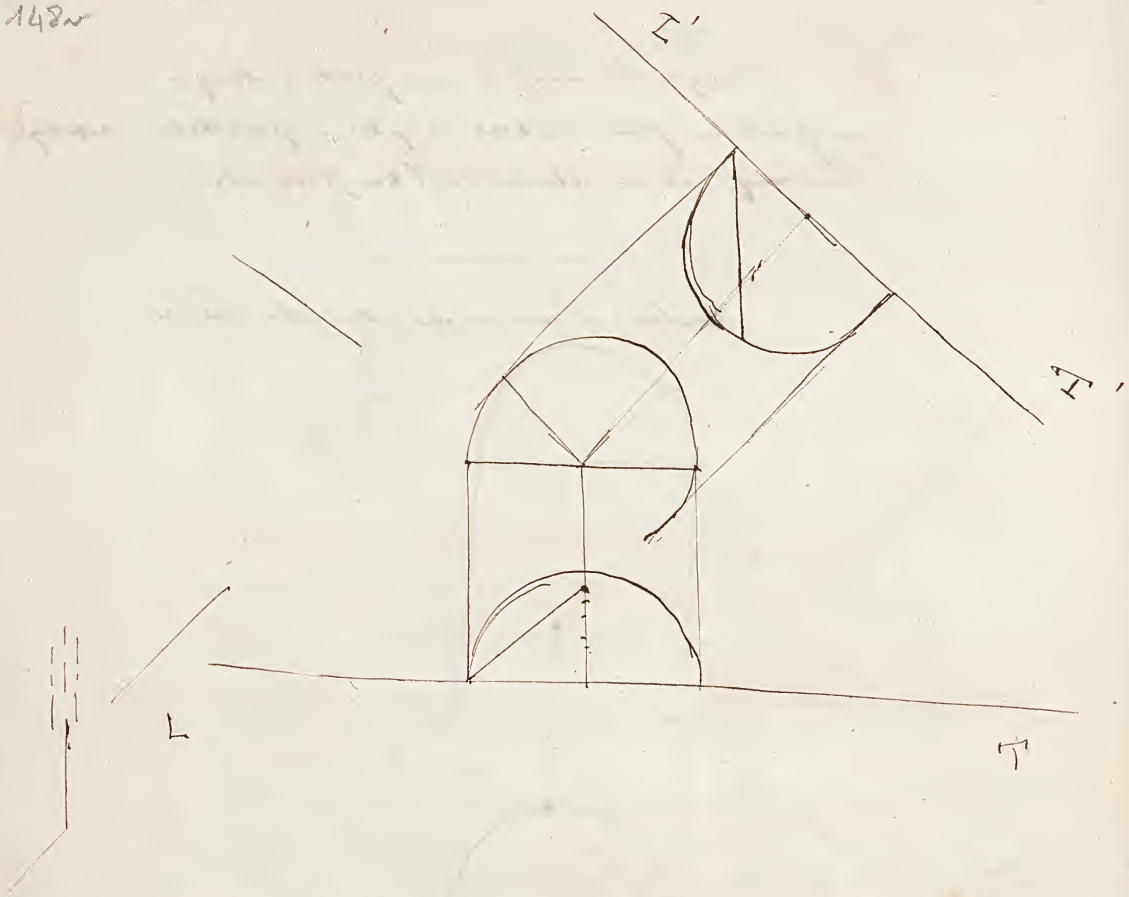
Le rayon lumineux à une posit. quelconque —
on prend un plan vertical auxiliaire parallèle aux rayons lumineux; et on retombe sur le cas précédent. —

Ombre d'une niche sur elle même.



L'intersection d'une sphère qui a pour base un grand cercle de la sphère cupolasphère suivant un deuxième grand cercle, dont le centre est sur un plan perpend. aux genera., tout est symétrique par rapport à ce plan.

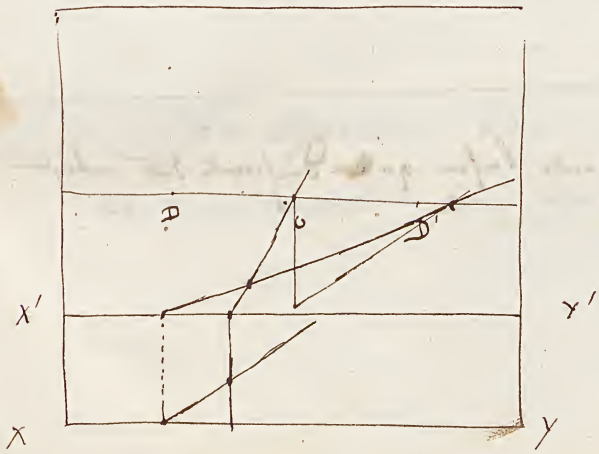
148v

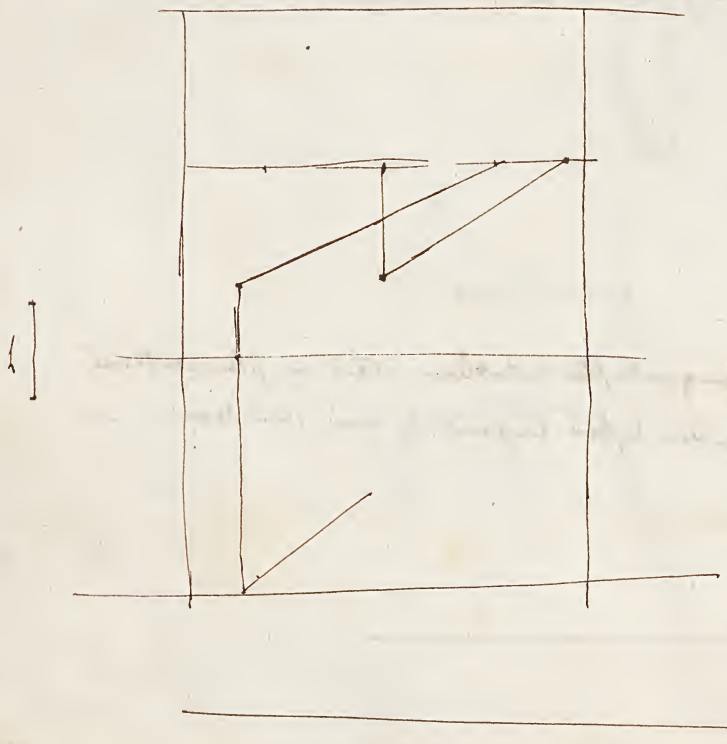


Lieu de raccordement entre l'ellipse et la courbe de quatrième degré.

des droites parallèles en point perspectif —

on suppose que le plan du tableau soit un plan vertical.
Soient définis le point de vue et le donné —





Perspective d'un droite
situé dans le plan horizontal.

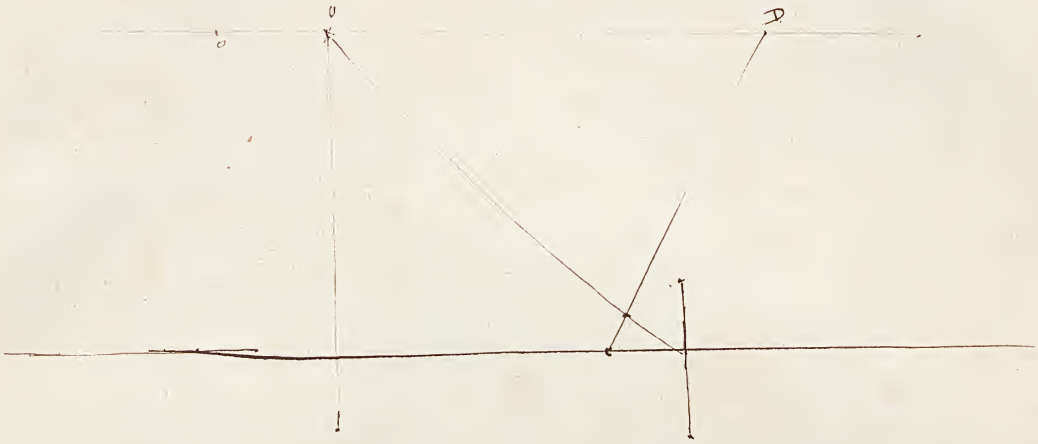
Perspective d'une droite horizon

Perspective d'une droite
quelconque —

Toutes les fois que des points sont en ligne droite
on aura

Propriétés du cercle démontrées par la perspective.

Perspective d'une chapelle



Perspective d'une voûte d'arrête

ou tronc tangente comme aux ellipses

BIBLIOTHÈQUE ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

150v

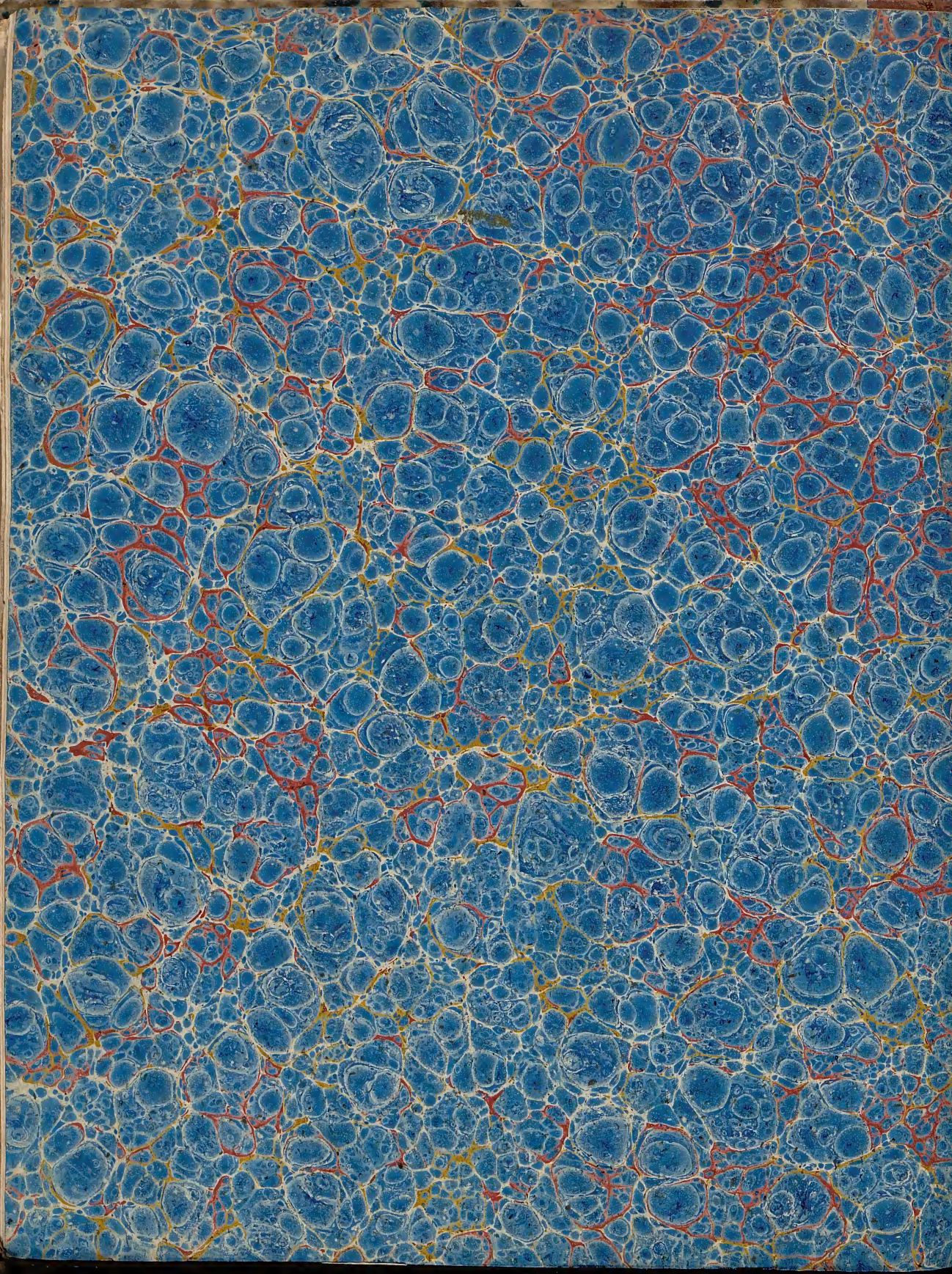
151 n r

151v

152 r

152v

153v



MO
COM
DEC
EC
NO